Première S

Problèmes du second degré

Définition :

On appelle polynôme du second degré ou de degré 2 toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto\ ax^2 + bx + c,$ où a, b, c sont des réels, $a \neq 0$.

On parle également souvent de trinôme.

Les valeurs qui annulent le polynôme ont nommées **racines** du polynôme.

Forme canonique :

Tout polynôme de degré 2 peut s'écrire sous **forme canonique** $a(x-\alpha)^2+\beta$.

On appelle **discriminant** du trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme a une seule racine : $x\,' = \frac{-b}{2a}$ (dite racine double).
- Si $\Delta < 0$, le polynôme n'a pas de racine.

Pté : Lorsque le polynôme a deux racines, leur somme est $S = -\frac{b}{a}$ et leur produit $P = \frac{c}{a}$.

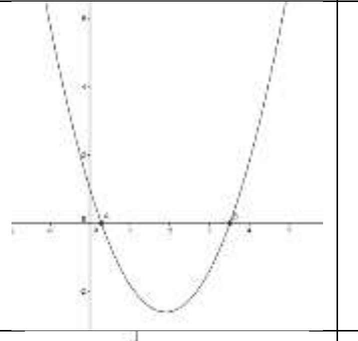
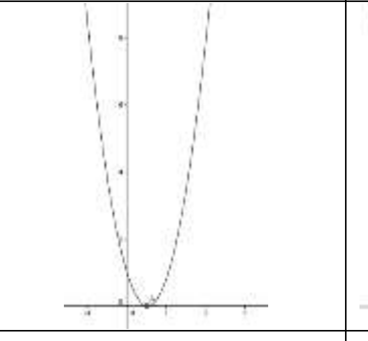
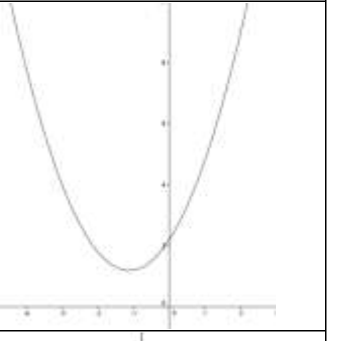
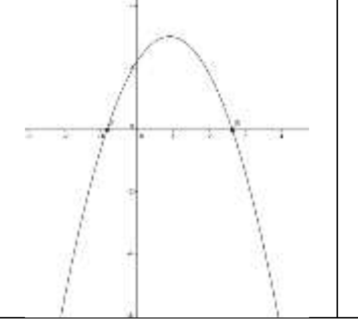
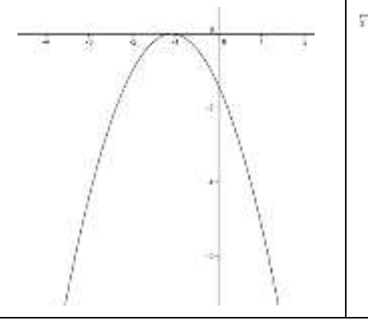
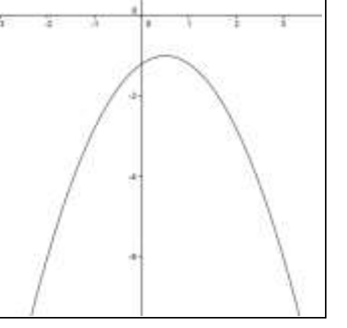
Factorisation :

- Si $\Delta > 0$, le trinôme se factorise sous la forme $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
- Si $\Delta = 0$, le trinôme se factorise sous la forme : $P(x) = a(x-x\,')^2$
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Signe du trinôme :

- Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de - a entre les racines.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme est du signe de a sauf pour $x' = -\frac{b}{2a}$, où il s'annule.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a.

Interprétation graphique : Selon le signe de a et celui de Δ, six cas différents peuvent se présenter :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

La parabole a pour **sommet** le point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$, et pour **axe de symétrie** la droite d'équation $y = -\frac{b}{2a}$.

Remarque : l'abscisse du sommet est la demi-somme des deux racines (lorsqu'il y en a).

Complément : Fonctions polynômes

On appelle fonction **polynôme** toute fonction définie sur ℝ par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où les $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des réels quelconques appelés **coefficients** du polynôme et a_n est un réel non nul. *n* est le **degré** du polynôme. $a_i x^i$ est **le terme de degré *i*** (monôme).

Polynôme nul : si pour tout entier *i*, on a $a_i = 0$, le polynôme est appelé polynôme nul. Pour tout réel *x*, on a alors $P(x) = 0$.

Théorème : L'écriture d'un polynôme est unique.

Egalité de deux polynômes :

Deux polynômes P et Q sont égaux si :

- Ils ont le même degré ;
- Les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Application : Déterminer α et β tels que $3x^2 - 2x - 5 = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Opération sur les polynômes :

- La somme de deux polynômes est un polynôme de degré inférieur ou égal au degré max $(degP; degQ)$.
- Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme de degré égal à $degP \times degQ$.

Racines d'un polynôme :

Soit P un polynôme et α un réel. α est une **racine** du polynôme P si $P(\alpha) = 0$. Dans ce cas, $P(x)$ se factorise par $(x - \alpha)$ ie il existe un polynôme Q de degré $degQ = degP - 1$ tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

Application : Soit P le polynôme défini sur ℝ par $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7x - 6$. Calculer $P(1)$. En déduire une écriture de P comme produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.

Première S *Polynômes – Applications :*

1- Equations bicarrées :

On appelle **équation bicarrée** toute équation de la variable *x*, ne contenant que des termes en x^4, x^2, et des termes constants.

On considère l'équation (E) : $3x^4 + 2x^2 - 5 = 0$, à résoudre dans ℝ. On effectue un changement de variable afin de retrouver une équation de degré 2.

Soit $X = x^2$, avec $X \geq 0$.

L'équation (E) est équivalente à (E') : $3X^2 + 2X - 5 = 0$.

Donc le discriminant est $\Delta = 4 + 60 = 64$.

D'où les solutions de (E') : $X' = \frac{-2-8}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ et $X'' = \frac{-2+8}{6} = 1$. Le changement de variable nous impose de rejeter la première solution car elle est négative.

Il nous reste donc à résoudre l'équation suivante : $X = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

L'équation (E) : $3x^4 + 2x^2 - 5 = 0$ admet donc comme ensemble solution dans ℝ:

$S = \{-1; 1\}$

2- Equations irrationnelles :

> Pour deux réels *a* et *b*, dire que $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geq 0 \end{cases}$

On considère l'équation (E), à résoudre dans IR : $\sqrt{13x^2 + 10x - 23} = 3x + 1$.

On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{13x^2 + 10x - 23} = 3x + 1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 13x^2 + 10x - 23 = (3x+1)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 13x^2 + 10x - 23 = 9x^2 + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 + 4x - 24 = 0 \end{cases}$$

Résolvons l'équation $4x^2 + 4x - 24 = 0$: $\Delta = 400$ et $x_1 = \frac{-4-20}{8} = -3$, $x_2 = \frac{-4+20}{8} = 2$.

D'où : $\sqrt{13x^2 + 10x - 23} = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x = 2 \text{ ou } x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

L'équation (E) $\sqrt{13x^2 + 10x - 23} = 3x + 1$ admet pour ensemble solution : $S = \{2\}$.

3- Equation avec paramètres :

Equation avec paramètres : Soit m un réel fixé. On considère la fonction trinôme de degré 2 définie sur ℝ par : $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$.

a) Déterminer le nombre de racines de ce polynôme en fonction de la valeur du paramètre *m*.

b) Quelles valeurs peut prendre *m* pour que $f(x)$ soit strictement négatif sur ℝ ?

(a) Le discriminant du trinôme est $\Delta = 16 - 4 \times 2(m-1) \times m = 16 - 8(m^2 - m) = -8m^2 + 8m + 16 = 8(-m^2 + m + 2)$. Le signe de Δ est le même que celui du trinôme de variable m : $(-m^2 + m + 2)$. Or le discriminant de ce trinôme est : $\delta = 1 + 8 = 9$. Il admet donc deux racines $m_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2$ et $m_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$ et son signe est alors donné par le tableau :

m	$-\infty$ $\quad$ -1	2	$+\infty$
$\Delta = 8(-m^2 + m + 2)$	-	+	-

Le trinôme f admet :

- deux racines si $\Delta > 0$ ie pour $m \in]-1; 2[$,
- une racine double si $\Delta = 0$ ie pour $m = -1$ ou $m = 2$,
- et il n'a pas de racines si $\Delta < 0$ ie pour $m \in]-\infty\,; -1[\, \cup\,]2\,;\, +\infty[$.

(b) f sera strictement négatif sur ℝ à deux conditions :

- Son discriminant est négatif : donc $m \in]-\infty\,; -1[\, \cup\,]2\,;\, +\infty[$.
- Le coefficient de son terme de degré 2 est négatif : $m < 0$.

Par conséquent, pour $m \in]-\infty\,; -1[$.