Chap5 : Fonctions carré et trinôme

I- La fonction carré :

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Ses variations sont données par le tableau suivant :

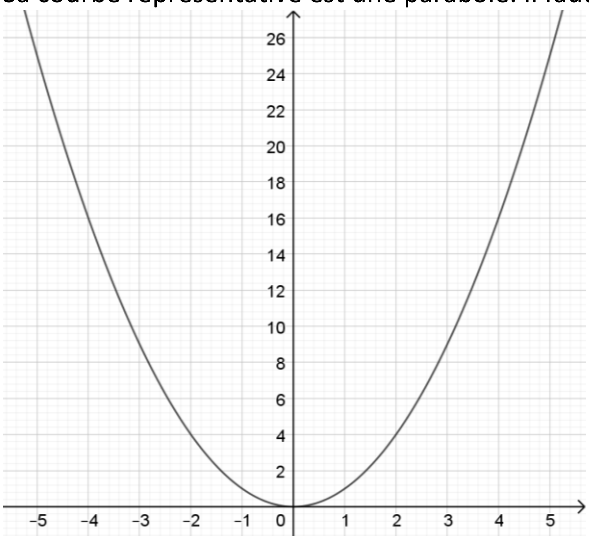
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Donc pour deux réels a et b :

Si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$

Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$

Sa courbe représentative est une parabole. Il faut savoir l'utiliser pour résoudre l'équation $x^2 = k$:



- Si $k < 0$: $x^2 = k$ n'a pas de solution
- $x^2 = 0$ a pour seule solution 0
- Si $k > 0$: $x^2 = k$ a deux solutions opposées $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$

II- Les fonctions trinômes :

Une fonction trinôme est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ où

a, b, c sont des réels avec a non nul. On l'appelle aussi polynôme de degré 2.

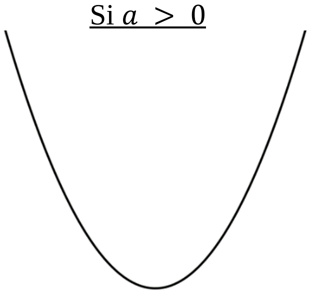
Sa courbe représentative est une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Toute fonction trinôme peut s'écrire sous la forme : $g(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$: c'est sa forme canonique.

Rqe : On utilise la forme canonique pour étudier les variations de g, trouver sa forme factorisée, ainsi que déterminer les éléments caractéristiques de la parabole qui représente cette fonction.

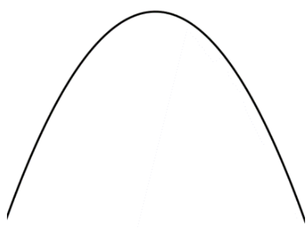
Dans les deux cas, la parabole a un axe de symétrie vertical et un sommet S.

Si $a > 0$



x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	y_S	$\nearrow$

Si $a < 0$



x	$-\infty$	x_S	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	y_S	$\searrow$

Méthodes : Il faut savoir déterminer les caractéristiques de ces deux éléments géométriques ainsi que les variations de la fonction trinôme.

Cas n°1 : on connaît la forme canonique (ou presque) :

Ex 1 : Soit f donnée par $f(x) = 2x^2 + 28\,x + 87$. Montrer que $f(x) = 2(x+7)^2 - 11$. En déduire les variations de f.

Ex 2 : Soit h donnée par $h(x) = -3x^2 + 6x + 2$.
Conjecturer la forme canonique de h à l'aide des données puis vérifier que cette conjecture est exacte.
Justifier alors que les variations de h sont données par le tableau ci-contre.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

Cas n°2 : la courbe permet de conjecturer les coordonnées du sommet :

On donne une représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 6x + 13$. On veut déterminer les coordonnées de son sommet et dresser son tableau de variations.
Conjecture des coordonnées du sommet : ……………………
L'axe de symétrie semble avoir pour équation : …………………………
Pour le vérifier :

1- Calculer l'image de 3 par f.
2- Vérifier que pour tout réel x, on a bien $f(x) \geq f(3)$.

Cas n°3 : on détermine les antécédents de deux points symétriques de la courbe :

Avec $f(x) = -2x^2 + 3x - 7$: on détermine les antécédents de -7, ce qui permet, avec la **demi-somme** des deux solutions, de trouver quel est le sommet de la parabole…

Cas n°4 :on connaît la forme factorisée : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par son expression littérale : pour tout réel x, $f(x) = 4(x-3)(x+5)$. Dresser son tableau de variations.

Optionnel mais intéressant :

- Savoir trouver la forme canonique d'une fonction trinôme
- Savoir démontrer les variations d'une fonction trinôme à partir de sa forme canonique.