Chapitre 1 : Raisonnement par récurrence

I- Principe du raisonnement :

1.1. Axiome de récurrence :

On désigne par $P(n)$ une proposition (ie énoncé soit vrai, soit faux) dépendant de l'entier n et on considère un entier particulier n_0. Pour démontrer que la proposition $P(n)$ est vrai à partir de l'entier n_0, il suffit de vérifier que :

- La proposition est vraie au rang n_0 (initialisation),
- Si pour un entier quelconque k la proposition $P(k)$ est vraie alors elle sera nécessairement vraie au rang $k+1$ (hérédité de la propriété).

1.2. Importance de l'initialisation :

Considérons la proposition $P(n)$: « $7^n + 1$ est un multiple de 6 ».

- Supposant que pour un certain entier k la proposition $P(k)$ est vraie, montrons qu'alors $P(k+1)$ l'est aussi.

On suppose que $7^k + 1$ est un multiple de 6. Donc on peut écrire $7^k + 1 = 6p$ pour un entier p.

On veut prouver que $P(k+1)$ *est vraie, c'est-à-dire que* $7^{k+1} + 1$ *est un multiple de 6.*

Or : $7^{k+1} = 7 \times 7^k = 7 \times (6p - 1) = 7 \times 6p - 7$.

Donc $7^{k+1} + 1 = 7 \times 6p - 7 + 1 = 7 \times 6p - 6 = 6\,(7p - 1)$. Il s'agit donc bien d'un multiple de 6 : $P(k+1)$ est vraie. Cette proposition est donc héréditaire.

- Mais $P(0)$ n'est pas vraie : $7^0 + 1 = 2$, non multiple de 6. On ne peut donc pas en déduire

que cette proposition est toujours vraie…En fait elle n'est jamais vraie ! (A vérifier sur quelques entiers…) On prouve en arithmétique que $7^n + 1$ est congru à 2 modulo 6, et n'est donc jamais un multiple de 6.

II- Exemple : Somme des cubes :

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1, 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Solution : *On remarque que la deuxième égalité vient du résultat bien connu :*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique).}$$

Démontrons donc la première égalité.

Notons pour $n \geq 1, P(n)$ *la proposition :* $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

- *Initialisation :*

  On a d'une part $1^3 = 1$, *et d'autre part,* $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 2^2}{4} = 1$, *donc* $P(1)$ *est vraie.*
- *Hérédité :*

  Démontrons que si $P(k)$ *est vraie pour un certain entier* $k \geq 1$, *alors* $P(k+1)$*est également vraie.*

On suppose que pour un k non nul : $\mathbf{1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}}$ ***(hypothèse de récurrence).***

Montrons que $1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

Or on a $1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$

Donc par Hypothèse de récurrence, a $1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$

D'où en factorisant par $(k+1)^2$ *:*

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + (k+1)\right] = \left(\frac{(k+2)^2}{4}\right)$$

Et $1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$. *Donc* $P(k+1)$ *est vraie.*

- *Conclusion : On a démontré par récurrence la proposition.*

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ *est vraie pour tout entier* $n \geq 1$.