Chapitre 3 : Nombres complexes

I- Ecriture algébrique et ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$:

Théorème (admis) :

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, et vérifiant :

- $\mathbb{C}$ est muni d'une **addition** et d'une **multiplication** qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul ;
- Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$;
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de *manière unique* :
  $z = a + ib$ avec a, b réels.

L'unicité de l'écriture s'écrit (pour $z = a + ib, z' = a' + ib'$) :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}.$$

En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des **nombres complexes**.
- Avec $z = a + ib$ (a, b réels) : a est la **partie réelle** de z, notée $Re(z)$, b est la **partie imaginaire** de z, notée $Im(z)$ (NB : $Re(z)$ et $Im(z)$ sont des réels).
- Si $b = Im(z) = 0$, alors z est un réel (les réels sont des complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
- L'écriture $a + ib$ est **l'écriture algébrique** du nombre complexe z.
- Si $a = Re(z) = 0$, alors z est **un imaginaire pur** ($z = ib$, b réel).

II- Calculs dans $\mathbb{C}$:

2.1. Inverse d'un nombre complexe :

Tout nombre complexe non nul admet un inverse :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Cette opération fait appel à la conjugaison, vue ci-dessous…

Ex : $\frac{1}{i} = -\frac{i}{i \times (-i)} = -\frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

2.2. Conjugué d'un complexe :

Soit z un nombre complexe, $z = a + ib$ avec a, b réels. On appelle **conjugué de z** le nombre complexe $\boxed{\bar{z} = a - ib}$, (« z barre »).

- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.
- Pour tout complexe z, on a :

$$\boxed{\begin{array}{c} \bar{\bar{z}} = z \\ z \times \bar{z} = a^2 + b^2 \end{array}}$$

La conjugaison est compatible avec les opérations : soient z, z' deux complexes ($z' \neq 0$) et n un entier :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \qquad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

2.3. Module d'un complexe :

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a, b réels, on définit le **module** de z par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On a les propriétés suivantes :

$$\boxed{z \times \bar{z} = |z|^2}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \qquad |z^n| = |z|^n$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$$

2.4. Equation du second degré dans $\mathbb{C}$:

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c\ réels, a \neq 0)$ admet :

- deux solutions réelles si son discriminant Δ est strictement positif,
- une solution « double » si $\Delta = 0$,
- deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, le polynôme à coefficients réels se factorise dans $\mathbb{C}$ par :

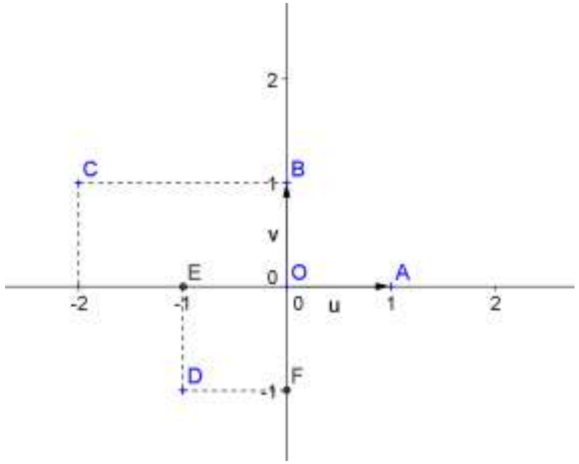
$$\boxed{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$$

III- Le plan complexe

3.1. Le plan complexe :

Le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est appelé **plan complexe** :

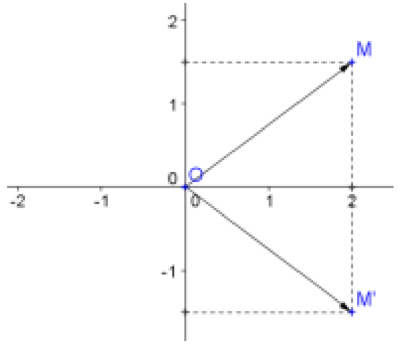
- Soit $z = a + ib$ un complexe. Le point $M(a; b)$ est **l'image** du complexe z, noté $M(z)$.
- Soit $M(x; y)$ un point du plan. Le nombre complexe $z = x + iy$ est **l'affixe** du point, notée z_M.
- On définit de même l'affixe d'un vecteur : $\vec{u}\binom{x}{y}$ a pour affixe $\vec{u}(x + iy)$ et si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$.
- L'axe des (Ox) est **l'axe des réels**, l'axe (Oy) est **l'axe des imaginaires purs**.



Sur la figure ci-dessus : $z_A = 1, z_B = i, z_C = -2 + i, z_D = -1 - i$.

3.2. Conjugaison :

Dans le plan complexe, un nombre complexe z et son conjugué $\bar{z}$ ont pour images des points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ **symétriques par rapport à l'axe réel**.



3.3. Module et argument d'un nombre complexe :

A tout point M du plan, on associe un couple de coordonnées cartésiennes $(a; b)$ et une affixe $z = a + ib$.

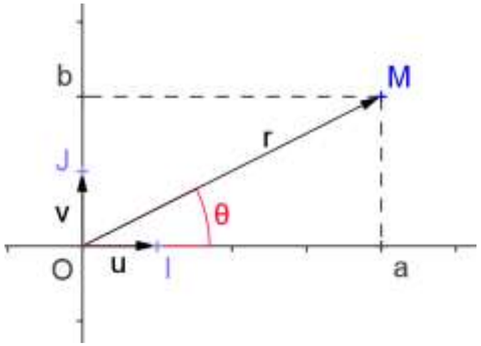
Mais M, distinct de l'origine, admet également un couple de coordonnées polaires $(r; \theta)$ tel que :

$$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) \quad [2\pi]$$

$$a = r\cos\theta \text{ et } b = r\sin\theta$$

$$\text{Donc } z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



Définition : z un nombre complexe non nul, $z = a + ib$, (a ou b non nul)

- Un argument de z, noté $\mathbf{arg}\, \boldsymbol{z}$, est n'importe quelle mesure exprimée en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
- Le module de z, noté $|\boldsymbol{z}|$, est la longueur OM.
- L'écriture de $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** de z avec $r = |z|$ et $\arg z = \theta\ (mod\ 2\pi)$.

!!! $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ n'est une forme trigonométrique que si $\boxed{r > 0}$.

Rqe : z est **réel** ssi $z = 0$ ou $\arg z\ = 0\ (modulo\ \pi)$

z est **imaginaire pur** ssi $\arg z = \frac{\pi}{2}\ (modulo\ \pi)$

Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique :

$$\boxed{\begin{array}{c} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{array}}$$

Ex :

- Si $z = 1 - i$: $r = \sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

d'où $\theta = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Donc $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

- Si $z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$, alors on trouve $z = -\sqrt{3} + i$.

A savoir : $|i| = 1, \arg(i) = \frac{\pi}{2}, |-i| = 1, \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$,
$|1| = 1, \arg(1) = 0, |-1| = 1, \arg(-1) = \pi$

3.4. Propriétés des modules et arguments :

- **Quotient :**

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :

$$\arg(z\,z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$$

$$|z\,z'| = |z|\,|z'|$$

Dém : Soit $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$. Alors :

$z\,z' = r\,r'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\,(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta)]$,

soit $z\,z' = r\,r'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$.

On reconnaît (comme $r\,r' > 0$) la forme trigonométrique de $z\,z'$, d'où $|z\,z'| = r\,r'$ et $\arg(z\,z') = \theta + \theta'$ (modulo 2π).

Conséquence : pour tout nombre complexe z non nul et tout entier n on a :

$$\boxed{\arg(z^n) = n\arg z} \text{ et } \boxed{|z^n| = |z|^n}$$

Formule de Moivre : Pour tout entier n et tout réel θ, on a :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

- **Quotient :**

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Dém : Posons $Z = \frac{z}{z'}$. Alors $z = Z\,z'$ et d'après le paragraphe précédent, $\arg z = \arg Z + \arg z'$ donc $\arg Z = \arg z - \arg z'$. De même pour les modules.

3.3. Lien avec le plan complexe :

Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives a et b.

$$AB = |b-a|$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)$$

En particulier, si A, B, C, D sont 4 points distincts d'affixes respectives a, b, c, d :

$$\boxed{\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}$$

En effet :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD})$

$= -\arg(b-a) + \arg(d-c) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$.

En particulier, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires** ssi $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0 \text{ } ou \text{ } \pi$ ie si $\frac{d-c}{b-a}$ est un réel.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** ssi $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ ie si $\frac{d-c}{b-a}$ est un imaginaire pur.