TS Spé Pour le 18 avril 2013

DM1

Exercice 1 : On étudie l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où a et n sont des entiers naturels, $n \geq 4$.

1. Montrer que si a existe alors a est impair.
2. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel. Le but de l'exercice est de montrer que si n n'est pas divisible par 5 alors $n^4 - 1$ est divisible par 5.

1. Sachant que n n'est pas divisible par 5, quels sont les différents restes possibles dans la division de n par 5 ? Ecrire les différentes congruences qui en résultent.
2. Dans chaque cas, déterminer la congruence modulo 5 de $n^4 - 1$. Conclure.

Exercice 3 : d'après bac

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. En déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   (a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 7 ?
   (b) Démontrer que si $p = 3n + 1$, A_p est divisible par 7.
   (c) Etudier le cas où $p = 3n + 2$.

TS Spé Pour le 18 avril 2013

DM1

Exercice 1 : On étudie l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où a et n sont des entiers naturels, $n \geq 4$.

1. Montrer que si a existe alors a est impair.
2. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel. Le but de l'exercice est de montrer que si n n'est pas divisible par 5 alors $n^4 - 1$ est divisible par 5.

1. Sachant que n n'est pas divisible par 5, quels sont les différents restes possibles dans la division de n par 5 ? Ecrire les différentes congruences qui en résultent.
2. Dans chaque cas, déterminer la congruence modulo 5 de $n^4 - 1$. Conclure.

Exercice 3 : d'après bac

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. En déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.
2. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des puissances de 2.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   (a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 7 ?
   (b) Démontrer que si $p = 3n + 1$, A_p est divisible par 7.
   (c) Etudier le cas où $p = 3n + 2$.