# Chapitre 8 : Nombres complexes et géométrie

Dans tout le chapitre, le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ appelé plan complexe.

## 1- Le plan complexe : Affixe d'un vecteur :

- Soit $z = a + ib$ un complexe. Le point $M(a; b)$ est l'image du complexe $z$, noté $M(z)$.
- Soit $M(x; y)$ un point du plan. Le nombre complexe $z = x + iy$ est l'affixe du point, notée $z_M$.

Deux points $A$ et $B$ du plan complexe ont pour affixes respectives $z_A$ et $z_B$.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
- Le milieu $I$ de $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$...

## 2- Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

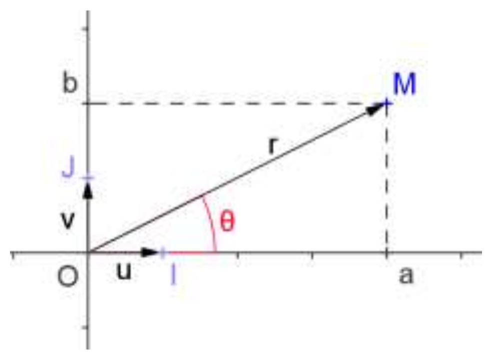
A tout point M du plan, on associe un couple de coordonnées cartésiennes $(a; b)$ et une affixe $z = a + ib$. Mais M, distinct de l'origine, admet également un couple de coordonnées polaires $(r; \theta)$ tel que :

$$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi]$$

$$a = r\cos\theta \text{ et } b = r\sin\theta$$

Donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$




*Définition :* z est un nombre complexe non nul, $z = a + ib$, avec $a$ ou $b$ non nul.

- Un argument de $z$, noté $\mathbf{arg}\, z$, est n'importe quelle mesure exprimée en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
- L'écriture de $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** de $z$ avec $r = |z|$ et $\arg z = \theta \ (mod\ 2\pi)$.

*Rqe :* $z$ est réel ssi $z = 0$ ou $\arg z = 0 \ (modulo\ \pi)$

$z$ est imaginaire pur ssi $\arg z = \frac{\pi}{2} \ (modulo\ \pi)$

*Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique :*

- Si on connait $r$ et $\theta$, alors $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$
- Si on connait $a$ et $b$, alors $r = |z|$ et $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$.

**!** $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ n'est une forme trigonométrique que si $\boxed{r > 0}$.

## 3- Propriétés des modules et des arguments :

### 3.1. Module et argument d'un produit :

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ non nuls, on a :

$$\arg(z\,z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$$

$$|z\,z'| = |z|\,|z'|$$

Conséquence : pour tout nombre complexe $z$ non nul et tout entier $n$ :

$$\boxed{\arg(z^n) = n\arg z} \text{ et } \boxed{|z^n| = |z|^n}$$

### 3.2. Module et argument d'un quotient :

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ non nuls, on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi] \text{ et } \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

### 3.3. Lien avec le plan complexe :

Soient $A$ et $B$ deux points distincts d'affixes respectives $a$ et $b$.

$$\boxed{AB = |b-a|} \qquad (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)$$

En particulier, si $A, B, C, D$ sont 4 points distincts d'affixes respectives $a, b, c, d$ :

$$\boxed{\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}$$

*Dém :* En effet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD})$

$$= -\arg(b-a) + \arg(d-c) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right).$$

**$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ssi $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = 0$ *ou* $\pi$ ie si $\frac{d-c}{b-a}$ est un réel**

**$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ssi $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ ie si $\frac{d-c}{b-a}$ est un imaginaire pur.**

Par ex si $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = i$, le triangle $ABC$ est isocèle et rectangle en $B$.

## 4- Forme exponentielle :

Vues les propriétés de la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$, on pose $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$. Il s'agit de la forme exponentielle du complexe de module 1 dont un argument est $\theta$.

Pour un nombre complexe non nul quelconque $z$ d'argument $\theta$ a donc pour forme exponentielle $\boxed{z = |z|e^{i\theta}}$.

*Valeurs à connaître :*

$$e^{i0} = 1$$
$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$
$$e^{\frac{-i\pi}{2}} = -i$$

*On a donc :*

- $|e^{i\theta}| = 1,$
- $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r' et\ \theta = \theta'$