TS **DM5 - Complexes et géométrie - Corrigé**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z $(z \neq -1)$ associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{-iz-2}{z+1}$.

Soient A, B, C les points d'affixes $a = -1, b = 2i, c = -i$.

1. Soit C' l'image du point C par f.

Déterminer l'affixe c' du point C' sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

On a $c' = \frac{-ic-2}{c+1} = \frac{-1-2}{1-i} = \frac{-3-3i}{2}$. Soit $c' = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}$. D'où $\boxed{C'\left(\frac{-3-3i}{2}\right)\ ie\ C'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)}$.

2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.

On a $d' = \frac{-id-2}{d+1}$ soit $\frac{1}{2} = \frac{-id-2}{d+1}$. Donc $d + 1 = -2id - 4$ et $d(1 + 2i) = -5$. D'où $d = -\frac{5}{1+2i} = -1 + 2i$. $\boxed{D(-1 + 2i)}$.

Pour tout nombre complexe z différent de -1, on note p le module de $z + 1$ et p' le module de $z' + i$.

a. Démontrer que, pour tout nombre complexe différent de -1, on a : $pp' = \sqrt{5}$.

On a :

$$pp' = |z + 1| \left|\frac{-iz-2}{z+1} + i\right| = |z + 1| \left|\frac{-iz-2+iz+i}{z+1}\right| = |z + 1| \left|\frac{-2+i}{z+1}\right| = |-2 + i| = \sqrt{5}$$

b. Si le point M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors le point $M' = f(M)$ appartient à un cercle Γ', dont on précisera le centre et le rayon.

Soit M un point sur le cercle de centre A et de rayon 2. On a alors $|z + 1| = 2$.

Alors d'après a), $|z' + i| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Donc M' est sur le cercle de centre $C(-i)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. Pour tout nombre complexe z différent de -1, on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z-2i}{z+1}$.

a. Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe ω.

On a $\frac{z-2i}{z+1} = \frac{z-z_B}{z-z_A}$. Donc $\arg\ \omega = \left(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB}\right)[2\pi]$

b. Montrer que $z' = -i\omega$.

On a $-i\omega = -i\ \frac{z-2i}{z+1} = \frac{-iz-2}{z+1} = z'$.

c. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.

Alors z' est un réel non nul si et seulement si son argument est 0 modulo π. D'où les équivalences suivantes :

$z' \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z' = 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg -i\omega = 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg -i + \arg \omega = 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{2} + \arg \omega = 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \ \arg\omega = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}\,;\ \overrightarrow{MB}\right) \ = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow M\ est\ sur\ le\ cercle\ de\ diamètre\ [AB], privé\ des\ points\ A\ et\ B.$

$\mathcal{F}$ est le cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B.

d. Vérifier que le point D appartient aux ensembles Γ et $\mathcal{F}$.

- Vérifions que D appartient à Γ : on doit vérifier que $|z_D - z_A| = 2$.

Or $|z_D - z_A| = |-1 + 2i + 1| = |2i| = 2$. Donc D appartient bien à Γ.

- Vérifions que D appartient à $\mathcal{F}$: un point appartient à $\mathcal{F}$ ssi l'image de son affixe par f est un réel non nul. Or l'image de l'affixe de D est $d' = \frac{1}{2}$. Donc $d' \in \mathbb{R}^*$ d'où D est bien un point de l'ensemble $\mathcal{F}$.

4. Représenter les ensembles Γ , Γ' et $\mathcal{F}$ en prenant $2\ cm$ pour unité graphique.