Formes d'un nombre complexe

- Forme algébrique

$$a + ib, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

Elle facilite les calculs de sommes et de différences et permet de faire le lien entre les nombres complexes et les coordonnées cartésienne des points images.

- Forme trigonométrique

$$r\,(\cos\theta + i\sin\theta), \; r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}$$

Elle établit un lien entre les nombres complexes et la géométrie euclidienne et permet les calculs de distances et d'angles.

- Forme exponentielle

$$r\,e^{i\theta}, \; r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}$$

Elle facilite les calculs de produits, de quotients et de puissances de nombres complexes
.

Identifier des complexes particuliers

- Pour prouver que z est un réel on peut prouver que :

$$Im(z) = 0$$
$$z = \bar{z}$$
$$\arg(z) = 0\ [\pi]\ ou\ z = 0$$

- Pour prouver que z est un imaginaire pur on peut prouver que :

$$RE(z) = 0$$
$$z = -\bar{z}$$
$$\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\ ou\ z = 0$$

Préciser la position relative de trois points

Soient z_A, z_B, z_C les affixes de trois points distincts A, B, C. On considère le nombre complexe :

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

Alors : $\arg Z = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})\ [2\pi]$ et $|Z| = \frac{AC}{AB}$

$$|Z| = 1\ équivaut\ à\ AB = AC$$

$$Z \in \mathbb{R}\ équivaut\ à\ A, B, C\ alignés$$

$$Z \in i\mathbb{R}\ équivaut\ à\ (AB) \perp (AC)$$

$$Z = \pm i\ équivaut\ à\ ABC\ isocèle\ et\ rectangle\ en\ A$$

$$Z = e^{\pm\frac{\pi}{3}}\ équivaut\ à\ ABC\ équilatéral$$

Transformations du plan

Rotation : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega), \; \omega \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$

Translation : $z' = z + b, \quad b \in \mathbb{C}$

Homothétie : $z' - \omega = k(z - \omega), \; \omega \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$

Symétrie de centre A : homothétie de centre A et rapport -1 ou rotation de centre A et d'angle π.

Symétrie de centre O : $z' = -z$

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses : $z' = \bar{z}$

Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $z' = -\bar{z}$

Ensemble de points

Médiatrice de [AB] : $MA = MB$

Cercle de diamètre $[AB]$ (privé de A et B) : $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Droite (AB) (privée de A et B) : $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = 0\ [\pi]$

Formules

$$z = a + ib \; alors \begin{cases} |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r}, \sin\theta = \dfrac{b}{r}\ (\theta = \arg z) \end{cases}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,, e^{i\pi} = -1,\ e^{\frac{i\pi}{2}} = i, e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i, \left|e^{i\theta}\right| = 1$$

Moivre : $(\cos\theta + i\sin\ \theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$