1S

PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

I-Loi de probabilité sur un ensemble fini :

1.1- Vocabulaire : exemple du lancer de dé :

- Lancer un dé et observer le chiffre sorti est une expérience aléatoire : son résultat dépend du hasard.
- Les résultats possibles sont les entiers de 1 à 6 : on les appelle les issues de l'expérience aléatoire.
- L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé univers, souvent noté Ω.
- On appelle événement toute partie de l'univers (ex : le chiffre est pair A ={2 ; 4 ; 6})
- L'événement contraire de A est appelé événement contraire, noté $\bar{A}$.
- Deux événements sont dits incompatibles si leur intersection est vide.
- La réunion de deux événements se note $A \cup B$, A ou B.
- L'intersection se note $A \cap B$: A et B (en même temps).
- Un événement élémentaire est un événement réduit à un seul élément.

  Rqe : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

1.2- Loi de probabilité :

Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Définir une loi de probabilité P sur cet univers, c'est associer à chaque ω_i un réel p_i tel que pour tout entier i : $0 \leq p_i \leq 1$ *et* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

On note alors $P(\omega_i) = p_i$, la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$.

1.3- Loi des grands nombres :

On constate que si l'on répète un très grand nombre de fois une expérience (lorsque c'est possible) les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser vers la valeur théorique donnée par la loi de probabilité.

Dans certains cas on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle choisi a priori ; dans d'autres cas on peut en revanche introduire une loi de probabilité par la répartition d'un grand nombre d'expériences (lorsque la loi de proba théorique n'est pas connue par exemple).

1.4- Espérance et Variance d'une loi de probabilité :

Si les issues d'une expérience aléatoire sont des réels alors on peut définir :

L'espérance de la loi de probabilité : $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i$

Sa variance : $V = \sum_{i=1}^{n} p_i(\omega_i - \mu)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i^2\right) - \mu^2$

Son écart-type : $\sigma = \sqrt{V}$

II- Probabilité d'un événement :

2.1- Calcul de probabilité :

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de toutes les issues qui le composent : $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$.

On rappelle que : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2.2- Cas d'équiprobabilité : loi équirépartie :

Lorsque toutes les issues on la même probabilité d'apparaître, on parle d'équiprobabilité, et on a $p_i = \frac{1}{n}$.

Pour un événement A : $P(A) = \frac{nombres\ d'issues favorables\ à\ la\ réalisation\ de\ A}{nombre\ d'isssues possibles\ dans\ l'expérience}$.

Ex : on lance trois pièces de monnaie, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois « face » ?

III- Variable aléatoire :

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle variable aléatoire toute fonction X de Ω dans ℝ qui, à tout élément de Ω fait correspondre un nombre réel.
- Pour un réel a donné, l'événement de Ω noté $\{X = a\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image a par X.

Une variable aléatoire n'est pas un nombre mais une fonction. Les valeurs de la variable aléatoires sont des nombres.

Ex : Lancer de dé, on gagne 5 euros si on tire un pair, on perd 3 euros sinon. On note X la variable aléatoire qui à un lancer de dé associe le gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X.

Espérance et variance d'une variable aléatoire :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$.

L'espérance de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i)$

Sa variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i).(x_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2.P(X = x_i)\right) - E(X)^2$

Son écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercice résolu en classe :

Dans une tombola, 100 tickets sont à la vente : Un seul ticket rapporte 100 € , 9 tickets rapportent 10 €, les autres tickets sont perdants. Pour jouer, il faut payer un ticket 3 €. Un joueur achète un ticket et tire son ticket au hasard. On appelle X son gain.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$. Le jeu est-il à l'avantage du joueur ou de l'organisateur ?