1ère S 10 juin 2011

IE dérivée- Corrigé

Exercice 1 :

1- $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$, en 5 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}(3(5+h)^2+2(5+h)-5-80)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}(3(25+10h+h^2)+10+2h-5-80)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}(75+30h+3h^2+10+2h-5-80)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}(3h^2+32h)\right) = \lim_{h\to 0}(3h+32) = 32$$

Cette limite est finie donc la fonction est dérivable en 5 et $\boxed{f'(5) = 32}$

2- $f(x) = -\frac{4}{x+2}$, définie sur $IR - \{-2\}$, en $a = -1$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left(-\frac{4}{-1+h+2}+4\right)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left(-\frac{4}{h+1}+\left(\frac{4(h+1)}{h+1}\right)\right)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\frac{(-4+4h+4)}{h+1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{4h}{h+1}\right)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{h+1}\right) = 4$$

Cette limite est finie donc la fonction est dérivable en -1 et $\boxed{f'(-1) = 4}$

3- $g(x) = \sqrt{x+5}$, définie sur $[-5\,;+\infty[$, en $a = 3$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(3+h)-g(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left(\sqrt{8+h}-\sqrt{8}\right)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\frac{\left(\sqrt{8+h}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{8+h}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{8+h}+\sqrt{8}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\frac{8+h-8}{\sqrt{8+h}+\sqrt{8}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\frac{h}{\sqrt{8+h}+\sqrt{8}}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{8+h}+\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Cette limite est finie donc la fonction est dérivable en 3 et $\boxed{g'(3) = \frac{1}{4\sqrt{2}}}$

4- $h(x) = \frac{1}{x^2}$, définie sur $[0\,;\,+\infty[$, en a non nul.

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(a+h)-h(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(a+h)^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\frac{a^2-(a+h)^2}{a^2(a+h)^2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\frac{-2ah-h^2}{a^2(a+h)^2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-2a-h}{a^2(a+h)^2}\right) = \frac{-2a}{a^4} = \frac{-2}{a^3}$$

Cette limite est finie pour a non nul donc la fonction est dérivable en a et $\boxed{h'(a) = -\frac{2}{a^3}}$

Exercice 2 :

1- L'équation de la tangente à la courbe de f au point $A(-1;4)$ est donnée par $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ soit $y = f'(-1)(x+1) + 4$. Déterminons $f'(-1)$.

On a
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}((3(-1+h)+1)^2 - 4)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}((3h-2)^2 - 4)\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}(9h^2 - 12h)\right) = \lim_{h\to 0} (9h - 12\ ) = -12$$

La fonction est donc dérivable en – 1 et $\boxed{f'(-1) = -12}$.

D'où l'équation de la tangente : $y = -12(x+1) + 4$. Soit $\boxed{y\ = -12x - 8}$.

2- L'équation de la tangente à la courbe de g au point A d'abscisse 2 est donnée par $y = g'(2)(x-2) + g(2)$ soit $= g'(2)(x-2) + \frac{3}{2}$. Déterminons $g'(2)$.

On a
$$\lim_{h\to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{3}{2+h} - \frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{6 - 3(2+h)}{2(2+h)}\right)\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}(-\frac{3h}{2(2+h)})\right) = \lim_{h\to 0}(-\frac{3}{2(2+h)}) = -\frac{3}{4}$$

La fonction est donc dérivable en 2 et $\boxed{g'(2) = -\frac{3}{4}}$.

D'où l'équation de la tangente : $y = -\frac{3}{4}(x-2) + \frac{3}{2}$. Soit $\boxed{y\ = -\frac{3}{4}x + 3}$.

Cette droite coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0 et d'ordonnée : $-\frac{3}{4} \times 0 + 3 = 3$. Il s'agit donc bien de B.

Exercice 3 : **Approximation affine locale**

On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur IR^{+*}.

Son approximation affine en 1 est $f(1+h) \approx hf'(1) + f(1)$. Or $f(1) = 1$. Déterminons $f'(1)$.

On a : $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}} - 1\right)\right) = \lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\frac{(1-\sqrt{1+h})}{\sqrt{1+h}}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\frac{(1-\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})}{\sqrt{1+h}\,(1+\sqrt{1+h})}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\frac{1-1-h}{\sqrt{1+h}\,(1+\sqrt{1+h})}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\frac{-h}{\sqrt{1+h}\,(1+\sqrt{1+h})}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{-1}{\sqrt{1+h}\,(1+\sqrt{1+h})}\right) = -\frac{1}{2}.$$

D'où $\boxed{f(1+h) \approx -\frac{1}{2}h + 1}$.

2- D'où avec $h = 0{,}0004$ on trouve $\frac{1}{\sqrt{1{,}0004}} \approx 1 - \frac{1}{2}\ 0{,}0004$ ie $\frac{1}{\sqrt{1{,}0004}} \approx 1 -\ 0{,}0002$ et $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1{,}0004}} \approx 0{,}9998}$.

De même pour $h = -0{,}02$ on trouve $\frac{1}{\sqrt{0{,}98}} \approx 1 + \frac{1}{2}\ 0{,}02$ ie $\frac{1}{\sqrt{0{,}98}} \approx 1 +\ 0{,}01$ et $\boxed{\frac{1}{\sqrt{0{,}98}} \approx 1{,}01}$.