

TD Probabilités - Loi d'équilibre génétique

Etant donné un gène possédant un couple d'allèles A, on dit qu'une plante est *homozygote* lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa. Une plante est *hétérozygote* lorsqu'elle est de génotype Aa.

Certaines plantes, le lupin par exemple, se reproduisent par autogamie (ou autofécondation) : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionnée au hasard. L'objectif de ce TD est l'étude de la descendance par autogamie d'une plante hétérozygote.

1. Première génération

Il est clair qu'une plante de génotype AA (resp. aa) donne par autogamie une plante de génotype AA (resp. aa). Déterminer les probabilités que la descendance d'une plante hétérozygote de génotype Aa soit une plante homozygote (AA ou Aa).

2. Générations successives

Partant d'une plante hétérozygote (ie Aa à la génération 0), on constitue par autogamie des générations successives. On utilise les notions suivantes :

- $(AA)_n$ est l'événement : « la plante de la n ème génération est de génotype AA ».
- $(Aa)_n$ est l'événement : « la plante de la n ème génération est de génotype Aa ».
- $(aa)_n$ est l'événement : « la plante de la n ème génération est de génotype aa ».

On appelle x_n la probabilité de $(AA)_n$, y_n la probabilité de $(Aa)_n$ et z_n celle de $(aa)_n$.

- (a) Evaluer x_0, y_0, z_0 .
- (b) Calculer x_1, y_1, z_1 .
- (c) Exprimer la probabilité de $(AA)_{n+1}$ sachant $(AA)_n$, puis celle de $(AA)_{n+1}$ sachant $(Aa)_n$ et enfin celle de $(Aa)_{n+1}$ sachant $(Aa)_n$.

A l'aide des résultats précédents, démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$. Donner l'expression de z_{n+1} .

3. Etude des suites $(x_n), (y_n), (z_n)$

- (a) Calculer les valeurs de x_n, y_n, z_n pour n allant de 0 à 10 à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice. Que peut-on conjecturer sur ces trois suites ?
- (b) Quelle est la nature de la suite (y_n) ? Exprimer y_n en fonction de n .
- (c) Exprimer x_n en fonction de n en remarquant que

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) = \frac{1}{4}(y_{n-1} + y_{n-2} + \dots + y_0)$$

4. Evolution dans le temps

Déterminer les limites des suites $(x_n), (y_n), (z_n)$. Interpréter.