# Baccalauréat Blanc

# Mathématiques

## Terminale S

## Enseignement obligatoire

- Durée de l'épreuve : 4 heures
- Coefficient 7

*Ce sujet comporte 4 exercices.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat veillera à ce que lui soit remis le sujet correspondant à sa spécialité.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Exercice 1 : 5 points**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de 3 niveaux ont répondu aux questions suivantes :

- A quel niveau est votre bureau ?
- Empruntez-vous l'escalier ou l'ascenseur pour vous y rendre ?

Les réponses sont les suivantes :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et parmi elles, 50 vont au premier niveau, 75 au deuxième niveau et 100 vont au troisième.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au deuxième niveau, les autres vont au premier niveau.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On pourra considérer les événements :

- $N_1$ : La personne va au 1$^{\text{er}}$ niveau
- $N_2$ : La personne va au 2$^{\text{ème}}$ niveau
- $N_3$ : La personne va au 3$^{\text{ème}}$ niveau
- $E$ : La personne emprunte l'escalier

**1.** Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

**2.** **a**. Montrer que la probabilité que la personne interrogée aille au 2$^{\text{ème}}$ niveau par l'escalier est $\frac{1}{12}$.

**b**. Montrer que les événements $N_1, N_2, N_3$ sont équiprobables.

**c.** Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier, sachant qu'elle va au 2$^{\text{ème}}$ niveau.

**3.** On interroge désormais 3 personnes de cette population, et on suppose que leurs réponses sont indépendantes. On appelle $X$ la variable aléatoire qui, aux trois personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2$^{\text{ème}}$ niveau.

**a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable $X$.

**b.** D'après le résultat précédent, en moyenne, sur 3 personnes, combien vont au deuxième niveau ?

**4.** Soit $n$ un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais $n$ personnes de cette population et on suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres. Déterminer le plus petit entier $n$ strictement positif tel que la probabilité de l'événement $A$ : « Au moins une personne va au 2$^{\text{ème}}$ niveau » soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

## Exercice 2 : 6 points

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

**Partie A**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. En déduire le sens de variation de $(u_n)$.
3. Etablir alors que $(u_n)$ est convergente.

**Partie B**

*L'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de la limite de la suite $(u_n)$.*

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

**1.** On considère la suite $(S_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

- **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$
- **b.** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que pour tout réel $x$ distinct de $-1$ et $0$ on ait : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
- **c.** En déduire que tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

**2.** En utilisant les questions précédentes, déterminer la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

**3.** Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

**4.** Conclure.

## Exercice 3 : 6 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $A, B, C$ d'affixes respectives $z_A = 2 + i, z_B = -4 + 3i$ et $z_C = -2 - i$.

**1.** Donner la forme algébrique et la forme exponentielle du complexe $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.

En déduire la nature du triangle $ABC$.

**2.** On considère la rotation $r$ de centre $C$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que son écriture complexe est $z' = iz + i - 3$.

**3.** On appelle $s$ la symétrie centrale de centre le milieu $D$ de $[AB]$. Déterminer l'écriture complexe de $s$.

**4.** On s'intéresse à présent à la transformation géométrique $f = r \circ s$, composée de $s$ et de $r$.

- **a.** Quelle est l'image de $B$ par $f$ ?
- **b.** Déterminer l'écriture complexe de $f$.
- **c.** Quelle est la nature de $f$ ? Donner ses éléments caractéristiques.

**Exercice 4 : 5 points**

**Partie A : restitution organisée de connaissance**

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{e^t}{t}\right) = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ .

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

**1.** Soit $g$ la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Montrer que la fonction $g$ est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.

**2. a.** Montrer que, pour tout $x$ de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

**b.** En déduire le sens de variation de $f$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

**c.** Montrer que la droite $(d)$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ .

**d.** Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $(d)$.

**3.** Pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 2, on note respectivement $M_k$ et $N_k$ les points d'abscisse $k$ de $\mathcal{C}$ et $(d)$.

**a.** Montrer que, pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 2, la distance $M_kN_k$ entre les points $M_k$ et $N_k$ est donnée par $M_kN_k = \frac{\ln k}{k}$ .

**b.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.* Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier $k_0$ supérieur ou égal à 2 tel que la distance $M_kN_k$ soit inférieure ou égale à $10^{-2}$.