Baccalauréat Blanc

Mathématiques

Terminale S

Enseignement de spécialité

- Durée de l’épreuve : 4 heures
- Coefficient 9

Ce sujet comporte 4 exercices.

L’utilisation d’une calculatrice est autorisée.

Le candidat veillera à ce que lui soit remis le sujet correspondant à sa spécialité.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : 5 points

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de 3 niveaux ont répondu aux questions suivantes :

- A quel niveau est votre bureau ?
- Empruntez-vous l'escalier ou l'ascenseur pour vous y rendre ?

Les réponses sont les suivantes :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et parmi elles, 50 vont au premier niveau, 75 au deuxième niveau et 100 vont au troisième.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au deuxième niveau, les autres vont au premier niveau.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On pourra considérer les événements :

- N_1 : La personne va au 1$^{\text{er}}$ niveau
- N_2 : La personne va au 2$^{\text{ème}}$ niveau
- N_3 : La personne va au 3$^{\text{ème}}$ niveau
- E : La personne emprunte l'escalier

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a**. Montrer que la probabilité que la personne interrogée aille au 2$^{\text{ème}}$ niveau par l'escalier est $\frac{1}{12}$.

b. Montrer que les événements N_1, N_2, N_3 sont équiprobables.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier, sachant qu'elle va au 2$^{\text{ème}}$ niveau.

3. On interroge désormais 3 personnes de cette population, et on suppose que leurs réponses sont indépendantes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux trois personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2$^{\text{ème}}$ niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

b. D'après le résultat précédent, en moyenne, sur 3 personnes, combien vont au deuxième niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population et on suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres. Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement A : « Au moins une personne va au 2$^{\text{ème}}$ niveau » soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

<u>Exercice 2 : 6 points</u>

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Partie A

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. En déduire le sens de variation de (u_n).

3. Etablir alors que (u_n) est convergente.

Partie B

L'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

1. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f(n) + (f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et 0 on ait : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

c. En déduire que tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

2. En utilisant les questions précédentes, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

3. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

4. Conclure.

Exercice 3 : 6 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : ROC : Soient a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

Prouver que si $a \equiv b \quad (mod\ n)$ et $c \equiv d \quad (mod\ n)$ alors $ac \equiv bd \quad (mod\ n)$.

Partie B : Inverse de 23 modulo 26 : On considère l'équation (E) : $23x + 26y = 1$, où x, y sont deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-9\ ;\ 8)$ est une solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire un entier a tel que $0 \leq a \leq 25$ et $23\ a \equiv 1\ (mod\ 26)$.

Partie C : Chiffrement de Hill : On veut coder un mot de deux lettres suivant la procédure suivante :

Etape 1 : Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers $(x_1; x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 à la deuxième.

Etape 2 : $(x_1; x_2)$ est transformé en $(y_1; y_2)$ tel que

$$(S_1) \quad \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 & (mod\ 26) \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 & (mod\ 26) \end{cases} \quad avec\ 0 \leq y_1 \leq 25\ et\ 0 \leq y_2 \leq 25$$

Etape 3 : $(y_1; y_2)$ est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de l'étape 1.

<u>Exemple :</u> $TE \ \rightarrow (19\,;4) \ \rightarrow \ (13\,;19) \ \rightarrow \ NT.$

1. Coder le mot ST.
2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage.
   - **a.** Montrer que tout couple $(x_1; x_2)$ vérifiant les conditions du système (S_1), vérifie les équations du système :

   $$(S_2) \quad \begin{cases} 23\ x_1 \equiv 4\ y_1 + 23\ y_2 & (mod\ 26) \\ 23\ x_2 \equiv 19\ y_1 + 11\ y_2 & (mod\ 26) \end{cases}$$

   - **b.** A l'aide de la partie B, montrer que tout couple $(x_1; x_2)$ vérifiant les conditions du système (S_2), vérifie les équations du système :

   $$(S_3) \quad \begin{cases} x_1 \equiv 16\ y_1 + \ y_2 & (mod\ 26) \\ x_2 \equiv 11\ y_1 + 5\ y_2 & (mod\ 26) \end{cases}$$

   - **c.** Montrer que tout couple $(x_1; x_2)$ vérifiant les conditions du système (S_3) vérifie les équations du système (S_1).
   - **d.** Décoder le mot YJ.

Exercice 4 : 5 points

Partie A : restitution organisée de connaissance

On rappelle que $\lim_{t \longrightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t}\right) = +\infty$. Démontrer que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;\,+\infty[$.

c. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

d. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (d).

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et (d).

a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \frac{\ln k}{k}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.* Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.