# Exercices d'Algorithmique au bac 2012

## Antilles

**EXERCICE 4** **5 points**

**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

*Les cinq questions sont indépendantes.*

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.
   On choisit, au hasard, un élève du lycée.
   Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.
   Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ? 3.
3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
   Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à $10^{-3}$.
4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
   On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
   On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
   On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
   On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?
5. On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
                Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
                Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
```

   Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.
   Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Les quatre questions sont indépendantes.**

1. **a.** Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation

$$(E) \qquad 11x - 5y = 14.$$

   **b.** Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$,

$$2^{3n} \equiv 1 \qquad (\text{mod } 7).$$

   **b.** Déterminer le reste de la division euclidienne de $2011^{2012}$ par 7.
3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1 - \text{i})z + 4 - 2\text{i}.$$

4.
5. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N ≤ √A
            Si A/N − Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N
            Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

   Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?
   Que donne cet algorithme dans le cas général ?

## Amérique du nord

**EXERCICE 2** **5 points**

**PARTIE A. Restitution organisée des connaissances**

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

**PARTIE B.**

On considère la fonction $f$ définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit $g$ la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   Montrer que la fonction $g$ est positive sur $[1\,;+\infty[$.
2. **a.** Montrer que, pour tout $x$ de $[1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   **b.** En déduire le sens de variation de $f$ sur $[1\,;+\infty[$.
   **c.** Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   **d.** Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 2, on note respectivement $M_k$ et $N_k$ les points d'abscisse $k$ de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
   **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 2, la distance $M_kN_k$ entre les points $M_k$ et $N_k$ est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.
   **b.** Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier $k_0$ supérieur ou égal à 2 tel que la distance $M_kN_k$ soit inférieur ou égale à $10^{-2}$.

## ASIE

**EXERCICE 4** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

1. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Entrée** | Saisir un réel strictement positif non nul $a$<br>Saisir un réel strictemenl positif non nul $b$ $(b > a)$<br>Saisir un entier naturel non nul $N$ |
| **Initialisation** | Affecter à $u$ la valeur $a$<br>Affecter à $v$ la valeur $b$<br>Affecter à $n$ la valeur 0 |
| **Traitement** | TANTQUE $n < N$<br>Affecter à $n$ la valeur $n+1$<br>Affecter à $u$ la valeur $\dfrac{a+b}{2}$<br>Affecter à $v$ la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$<br>Affecter à $a$ la valeur $u$<br>Affecter à $b$ la valeur $v$ |
| **Sortie** | Afficher $u$, afficher $v$ |

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4, b = 9 et N = 2$. Les valeurs successives de $u$ et $v$ seront arrondies au millième.

| $n$ | $a$ | $b$ | $u$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 9 | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |

Dans la suite, $a$ et $b$ sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   **b.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
   En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. **a.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

   **b.** Comparer $v_{n+1}^2$ et $v_n^2$. En déduire le sens de variation de la suite $(v_n)$.

4. Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.

## PONDICHERY

**EXERCICE 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les deux parties sont indépendantes.*

**Partie A**

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur $y$ à une variable $x$.

| | |
|---|---|
| Variables | $a, b, c, d, e$ sont des variables du type entier |
| Initialisation | $a := 0$ ; $b := 0$ ; $c := 0$ ; $d := 0$ ; $e := 0$ |
| Traitement | Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$<br>Début du tant que<br>$a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ;<br>$c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ;<br>$e :=$ rand(1, 50)<br>Fin du tant que |
| Sortie | Afficher $a, b, c, d, e$ |

   **a.** Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$ ; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$ ;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$ ; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$ ?

   **b.** Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

## CENTRES ETRANGERS

### EXERCICE 2 — 5 points

On considère la suite $(I_n)$ définie pour $n$ entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx.$$

1. (a) Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = xe^{x^2}$.
   Démontrer que la fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g$.
   (b) En déduire la valeur de $I_1$.
   (c) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel $n$, supérieur ou égal à 1, on a :
   $$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n.$$
   (d) Calculer $I_3$ et $I_5$.
2. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Initialisation | Affecter à $n$ la valeur 1<br>Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$ |
| | Tant que $n < 21$<br>Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$<br>Affecter à $n$ la valeur $n+2$ |
| **Sortie** | Afficher $u$ |

   Quel terme de la suite $(I_n)$ ontient-on en sortie de cet algorithme ?
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.
   (c) En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la valeur de $\ell$.

## POLYNESIE

### EXERCICE 3 — 5 points

**Partie A**

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel $U$ et les entiers naturels $k$ et $N$.

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N − 1

Affecter à U la valeur 3U − 2k + 3
Fin pour

Sortie
Afficher U
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$ ?

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant n$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
4. Soit la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit $p$ un entier naturel non nul.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier $n_0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$ ?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier $n_0$.
   (b) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.
   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier $n_0$ pour la valeur $p = 3$.
   (d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de $p$ donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier $n_0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

<u>**METROPOLE**</u>

**EXERCICE 3** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

*Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.*

**Partie A**

On désigne par $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
3. En déduire le signe de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

**Partie B**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables : | $i$ et $n$ sont des entiers naturels.<br>$u$ est un réel. |
| Entrée : | Demander à l'utilisateur la valeur de $n$. |
| Initialisation : | Affecter à $u$ la valeur 0. |
| Traitement : | Pour $i$ variant de 1 à $n$.<br>    Affecter à $u$ la valeur $u + \dfrac{1}{i}$ |
| Sortie : | Afficher $u$. |

   Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de $u_n$ lorsque l'utilisateur entre la valeur de $n$.
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à $10^{-3}$.

| $n$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 100 | 1 000 | 1 500 | 2 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0,697 | 0,674 | 0,658 | 0,647 | 0,638 | 0,632 | 0,626 | 0,582 | 0,578 | 0,578 | 0,577 |

   À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite $(u_n)$ et son éventuelle convergence.

**Partie C**

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite $(u_n)$ telle que pour tout entier strictement positif $n$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif $n$,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

   où $f$ est la fonction définie dans la partie A.
   En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.

2. **a.** Soit $k$ un entier strictement positif.
   Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.
   En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.
   Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

   **b.** Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement $k$ par $1, 2, \ldots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif $n$,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

   **c.** En déduire que pour tout entier strictement positif $n$, $u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite $(u_n)$ est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.