Baccalauréat Blanc

CORRIGE

Mathématiques

Terminale S

Enseignement obligatoire

- Durée de l'épreuve : 4 heures
- Coefficient 7

Ce sujet comporte 4 exercices.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat veillera à ce que lui soit remis le sujet correspondant à sa spécialité.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : 4 points

$\left(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + 2z - 1 = 0$.

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $B(1\,;\,-1\,;0)$ et de rayon 1.

Pour chacune des phrases ci-dessous une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer laquelle des trois réponses est juste en justifiant soigneusement votre choix.
Il est attribué pour chaque question $0{,}5$ *point pour chaque réponse et* $0{,}5$ *point si la justification est correcte.*

1. La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont :

   ~~**a.** parallèles ;~~

   ~~**b.** perpendiculaires ;~~

   c. non parallèles, non perpendiculaires.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, ils ne sont donc pas colinéaires. Donc $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas perpendiculaires. De même $\vec{u}.\vec{n} = 1 - 1 + 4 \neq 0$, ces deux vecteurs ne sont donc pas orthogonaux, donc $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles.

2. Soit $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}\,'$ admet pour équation cartésienne :

a. $\cancel{-2y + z + 2 = 0}$ vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{n_1}.\vec{n} = -2 + 1 + 4 \neq 0$. Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux donc ce plan n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

b. $2x - z = 0$ vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{n_2}.\vec{n} = 2 - 2 = 0$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux donc ce plan est perpendiculaire à $\mathcal{P}$. On vérifie de plus que ce plan contient bien la droite $\mathcal{D}$: soit $M(x = t\,;y = -t; z = 2t)$ un point de $\mathcal{D}$, pour un réel t. On a : $2 \times t - 2t = 0$. Les coordonnées de M vérifient l'équaton de $\mathcal{P}$, donc $M \in \mathcal{P}$. D'où la droite $\mathcal{D}$ est bien contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

c. ~~$x - y - z = 0$~~ vecteur normal $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{n_3}.\vec{n} = 1 - 1 - 2 \neq 0$. Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux donc ce plan n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

3. La droite Δ, intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan d'équation $2x - z = 0$ admet pour équation paramétrique :

~~**a.**~~ $\cancel{\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$

~~**b.**~~ $\cancel{\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$

c. $\begin{cases} x = t \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Ces deux plans sont sécants car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à l'intersection de ces plans si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = -x - 2z + 1 = -5x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :

~~**a.** un point ;~~

b. un cercle ;

~~**c.** l'ensemble vide.~~

La distance entre le centre $B(1\,;\,-1\,;0)$ de la sphère et le plan $\mathcal{P} : x + y + 2z - 1 = 0$ est :
$\frac{|1-1+0-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, qui est inférieure au rayon de la sphère. Le plan coupe donc la sphère selon un cercle.

<u>Exercice 2 : 5 points</u>

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}\,, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + i\,;\; z_B = -1 + i\sqrt{3}\,; z_C = -1 - 3i.$$

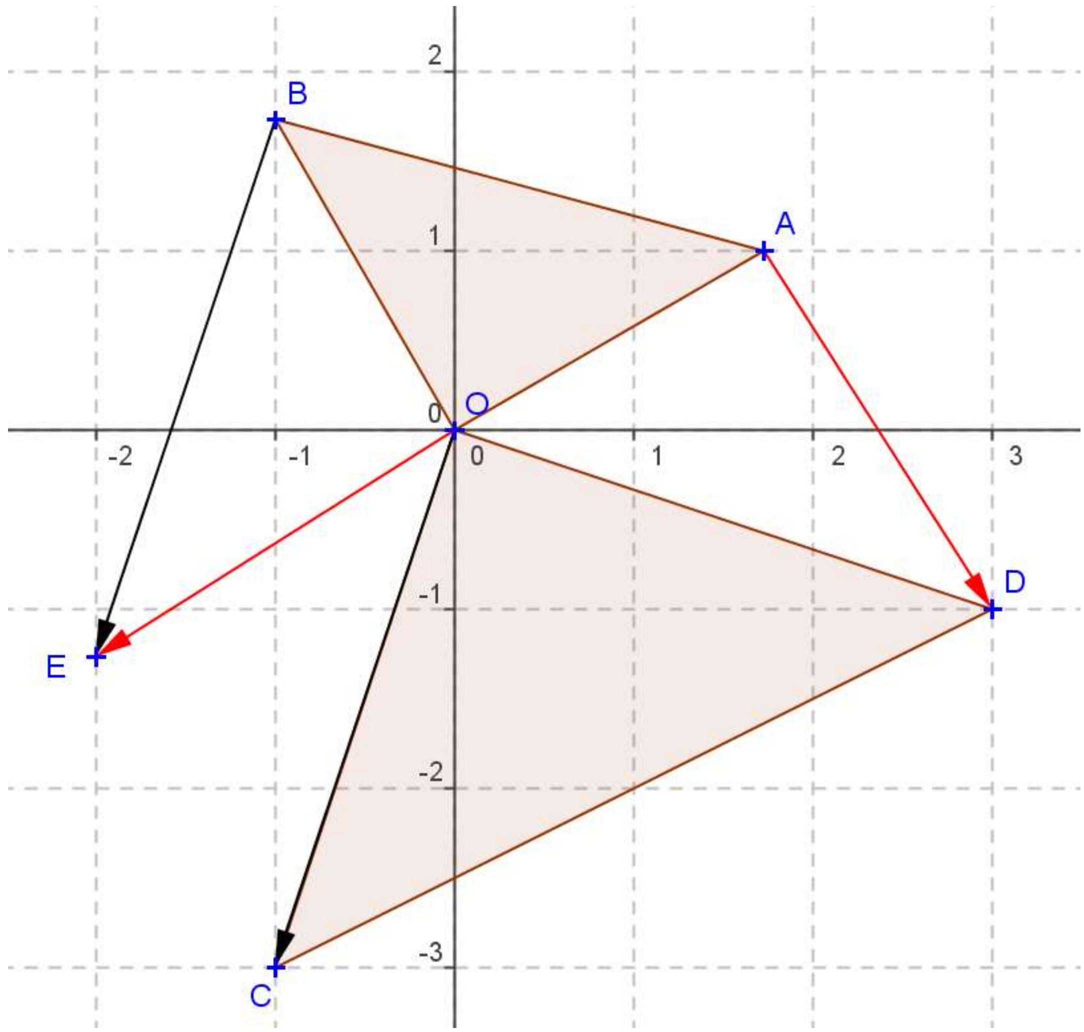
On note D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

On note E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

1. a. Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

$z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\, e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\, e^{\frac{2i\pi}{3}}$

b. Sur une feuille de papier millimétré, en prenant comme unité graphique 2 cm, placer les points A, B et C.



c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle.

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_0} = \frac{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}{2\, e^{\frac{i\pi}{6}}} = e^{\frac{2i\pi}{3} - \frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{i3\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Alors $\arg\frac{z_B-z_O}{z_A-z_0}=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ ie $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ et $\left|\frac{z_B-z_O}{z_A-z_0}\right|=\left|e^{\frac{i\pi}{2}}\right|=1$ ie $OB=OA$. On en déduit que OAB est rectangle et isocèle en O.

2. **a.** Construire les points D et E et calculer leurs affixes z_D et z_E.

• On a $z_D-z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_O)$ ie $z_D=iz_C=i(-1-3i)=3-i$.

• De même $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OC}$ donc $z_E-z_B=z_C-z_O$ $ie\ z_E=z_B+z_C=-1+i\sqrt{3}-1-3i=-2+i(\sqrt{3}-3)$

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et que $OE=AD$.

On a $\frac{z_D-z_A}{z_E-z_O}=\frac{3-i-\sqrt{3}-i}{-2+i(\sqrt{3}-3)}=\frac{-2i-\sqrt{3}+3}{-2+i\sqrt{3}-3i}=i$. Donc $\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_E-z_O}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ ie $(\overrightarrow{OE}\,;\,\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ et $\left|\frac{z_D-z_A}{z_E-z_O}\right|=|i|=1$ $ie\ AD=OE$.

3. Le but de cette question est de retrouver ce résultat dans un cas plus général. Il est inutile de refaire une figure.

Soient A,B,C,D et E les points d'affixe respectives non nulles z_A,z_B,z_C,z_D,z_E telles que

- Le triangle OAB est rectangle isocèle en O tel que $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}$;
- Le triangle OCD est rectangle isocèle en O tel que $(\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OD})=\frac{\pi}{2}$;
- Le quadrilatère $OBEC$ est un parallélogramme.

a. Justifier les égalités suivantes : $z_B=i\,z_A$; $z_D=i\,z_C$; $z_E=iz_A+z_C$.

OAB est rectangle isocèle en O tel que $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}$ s'écrit : $\frac{z_B}{z_A}=e^{\frac{i\pi}{2}}$ (car module 1 et arg $\frac{\pi}{2}$) don c $z_B=iz_A$. De même, $z_D=i\,z_C$.

Le quadrilatère $OBEC$ est un parallélogramme s'écrit : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OC}$ donc $z_E-z_B=z_C-z_O$

$ie\ z_E=z_B+z_C=iz_A+z_C$.

b. Montrer que :

$$\frac{z_D-z_A}{z_E}=i$$

Alors $\frac{z_D-z_A}{z_E}=\frac{iz_C-z_A}{iz_A+z_C}=\frac{i(z_C+iz_A)}{iz_A+z_C}=i$.

c. Interpréter géométriquement $\left|\frac{z_D-z_A}{z_E}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_E}\right)$ puis conclure.

Il est clair alors que $\left|\frac{z_D - z_A}{z_E}\right| = |i| = 1$ et que $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_E}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$. D'où $\frac{AD}{OE} = 1$ ie $OE = AD$ et vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

Exercice 3 : 5 points

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

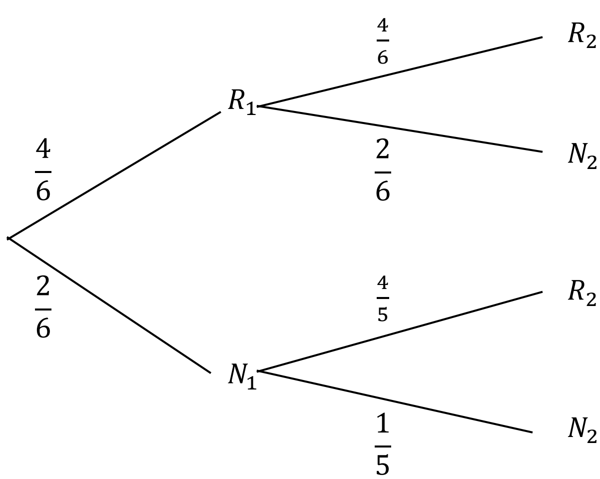
On prélève au hasard une boule de l'urne.

Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.

Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.

a. Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges ?

On réalise un arbre rendant compte de la situation :



Alors $P(les\ deux\ boules\ sont\ rouges\ ) = P_{R_1}(R_2)P(R_1) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{16}{36}$.

b. Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.

On a d'après l'arbre de probabilité et la formule des probabilités totales : $P(N_2) = P_{N_1}(N_2)P(N_1) + P_{R_1}(N_2)P(R_1) = \frac{2}{6}.\frac{4}{6} + \frac{1}{5}.\frac{2}{6} = \frac{2}{9} + \frac{1}{15} = \frac{13}{45}$

Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.

$$\text{On a : } P_{N_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{13}{45}} = \frac{2}{9}.\frac{45}{13} = \frac{10}{13}$$

2. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient quatre boules rouges et *n* boules noires indiscernables au toucher.

On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

La variable aléatoire *X* donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et *p*.

a. Donner l'expression de *p* en fonction de *n*.

p est la probabilité de tirer une rouge au cours d'un tirage : on a donc $p = \frac{4}{4+n}$.

b. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.

D'après la loi binomiale $P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Or ici on cherche $P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) = 1 - \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.

c. Quel est le plus petit entier naturel *n* pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0, 999 9 ?

On aura $q_n \geq 0{,}999\,9$ ssi $1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \geq 0{,}999\,9$ ie $0{,}0001 \geq \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$ ie $10^{-1} \geq \frac{4}{n+4}$ d'où $n \geq \frac{4-4.10^{-1}}{10^{-1}}$ soit $n \geq 3{,}6.10$ ie $n \geq 36$. Donc à partir de $n = 36$ on aura une probabilité de tirer au moins une noire supérieure ou égale à 0,999 9.

Exercice 4 : 6 points

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$

1. (a) Soit g la fonction définie par $g(x) = x\, e^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$ est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est dérivable, comme produit de deux fonctions de référence dérivables et on a :

$$G'(x) = \frac{1}{2} 2x\, e^{x^2} = x\, e^{x^2} = g(x)$$

(b) En déduire la valeur de I_1.

On a donc $I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \int_0^1 g(x) dx = [G(x)]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$.

(c) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n.$$

Soit entier naturel n, supérieur ou égal à 1. On a $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

Posons sur $[0\,;1]$, $u(x) = e^{x^2} \quad et \quad v'(x) = x^n$.

Alors : $u'(x) = 2x\, e^{x^2} \quad et \quad v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Ces quatre fonctions sont continues sur $[0\,;1]$, donc en intégrant par parties, il vient :

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}.\, e^{x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} 2x\, e^{x^2} dx = \frac{e}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 x^{n+2}\, e^{x^2} dx = \frac{1}{n+1}(e - 2\, I_{n+2})$$

D'où $(n+1)I_n = e - 2I_{n+2}$. Alors $I_{n+2} = \frac{1}{2}(e - (n+1)I_n)$. D'où le résultat cherché.

(d) Calculer I_3 et I_5.

En utilisant ce résultat, on obtient pour $n = 1$ puis pour $n = 3$:

$$I_3 = \frac{1}{2}e - \frac{2}{2}I_1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(e-1) = \frac{1}{2}$$

$$I_5 = \frac{1}{2}e - 2I_3 = \frac{1}{2}e - 1$$

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

On remarque que la valeur d'initialisation de u est celle de I_1 et que la valeur d'affectation de u dans la boucle « Tant que » est celle de la relation de récurrence liant I_{n+2} à I_n.

n	u	Commentaires
1	$\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = I_1$	Valeurs d'initialisation
3 5	I_3 I_5	Entrée de boucle Sortie de boucle
5	I_5	Entrée de boucle

7	I_7	Sortie de boucle
…	…	…
19 21	I_{19} I_{21}	Fin de la boucle Tant que (la dernière valeur vérifiant $n < 21$ est 19)
21	I_{21}	Affichage

On obtient donc le terme I_{21}.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geq 0$.

Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n e^{x^2} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, $\int_0^1 x^n e^{x^2} dx \geq 0$ ie $I_n \geq 0$.

(b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Pour tout réel $x \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{n+1} \leq x^n$, donc $x^{n+1}e^{x^2} \leq x^n e^{x^2}$.

D'où, en intégrant sur $[0\,;1]$, $I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.

(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

La suite est décroissante et minorée par zéro. D'après le théorème de convergente monotone, elle est donc convergente.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la valeur de ℓ.

On a pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$.

Supposons que $\ell \neq 0$. On sait que $\ell \geq 0$ car la suite est à termes positifs, donc en passant à limite dans l'égalité précédente, il vient :

$\lim I_{n+2} = \ell$ et $\lim \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n = -\infty$. On devrait donc avoir $\ell = -\infty$, ce qui est absurde.

D'où $\ell = 0$.