Baccalauréat Blanc

Mathématiques

Terminale S

Enseignement de spécialité

- Durée de l'épreuve : 4 heures
- Coefficient 9

Ce sujet comporte 4 exercices.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat veillera à ce que lui soit remis le sujet correspondant à sa spécialité.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : 4 points

$(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \quad t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + 2z - 1 = 0$.

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $B(1\,;\,-1\,;0)$ et de rayon 1.

Pour chacune des phrases ci-dessous une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer laquelle des trois réponses est juste en justifiant soigneusement votre choix.
Il est attribué pour chaque question $0{,}5$ *point pour chaque réponse et* $0{,}5$ *point si la justification est correcte.*

1. La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont :
   - **a.** parallèles ;
   - **b.** perpendiculaires ;
   - **c.** non parallèles, non perpendiculaires.
2. Soit $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}\,'$ admet pour équation cartésienne :
   - **a.** $-2y + z + 2 = 0$;
   - **b.** $2x - z = 0$;
   - **c.** $x - y - z = 0$.
3. La droite Δ, intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan d'équation $2x - z = 0$ admet pour équation paramétrique :
   - **a.** $\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$
   - **b.** $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$
   - **c.** $\begin{cases} x = t \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$
4. L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :
   - **a.** un point ;
   - **b.** un cercle ;
   - **c.** l'ensemble vide.

Exercice 2 : 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique 4 cm).
Soit le point Ω d'affixe 2.

On appelle *r* la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et *h* l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

   a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

   b. Montrer que l'écriture complexe de σ est $z \mapsto \frac{1+i}{2}z + 1 - i$.

   c. Soit *M* un point quelconque du plan d'affixe *z*. On désigne par *M'* son image par σ et on note *z'* l'affixe de *M'*. Montrer que $z' - z = i(z' - \omega)$.

   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour *M* distinct de Ω.

2. Soit A_0 le point d'affixe $2 + i$. On considère la suite $\left(A_n\right)_{n\in IN}$ de points du plan définie pour tout entier naturel *n* par $A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right)$.

   a. Montrer que pour tout entier naturel *n*, l'affixe a_n du point A_n est donnée par

   $$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{i(n+2)\pi}{4}} + 2$$

   b. Déterminer alors l'affixe de A_5 sous forme algébrique.

3. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, le point A_n soit à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,01.

<u>Exercice 3 : 5 points</u>

<u>Les questions 1 et 2 sont indépendantes.</u>

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

On prélève au hasard une boule de l'urne.

Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.

Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.

a. Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges ?

b. Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.

c. Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.

2. Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient quatre boules rouges et *n* boules noires indiscernables au toucher.

On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

La variable aléatoire *X* donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et *p*.

a. Donner l'expression de *p* en fonction de *n*.

b. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.

c. Quel est le plus petit entier naturel *n* pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à $0,999\,9$?

Exercice 4 : 6 points

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$

1. (a) Soit g la fonction définie par $g(x) = x\, e^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire la valeur de I_1.

(c) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n.$$

(d) Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n + 2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geq 0$.

(b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la valeur de ℓ.