Baccalauréat Blanc

CORRIGE

Mathématiques

Terminale S

Enseignement de spécialité

- Durée de l'épreuve : 4 heures
- Coefficient 9

Ce sujet comporte 4 exercices.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat veillera à ce que lui soit remis le sujet correspondant à sa spécialité.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 2 : 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm).
Soit le point Ω d'affixe 2.

On appelle *r* la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et *h* l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

La composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre est une similitude directe de même centre.

Donc σ est une similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. Montrer que l'écriture complexe de σ est $z \mapsto \frac{1+i}{2}z+1-i$

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ son image par σ. On a $\left(\overrightarrow{\Omega M'};\ \overrightarrow{\Omega M}\right) = \frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$ et $\Omega M' = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega M$.

Donc $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, soit $z'-2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}(z-2)$.

D'où $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-2)+2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)(z-2)+2 = \frac{1+i}{2}z-1-i+2 = \frac{1+i}{2}z+1-i$.

c. Soit *M* un point quelconque du plan d'affixe *z*. On désigne par *M'* son image par σ et on note *z'* l'affixe de *M'*. Montrer que $z'-z = i(z'-\omega)$.

On a $z'-z = \frac{1+i}{2}z+1-i-z = \frac{-1+i}{2}z+1-i = i\left(\frac{i+1}{2}z-i-1\right)$.

Alors : $i(z'-\omega) = i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}(z-2)\right) = i\left(\frac{1+i}{2}(z-2)\right) = i\left(\frac{1+i}{2}z-1-i\right) = z'-z$.

d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour *M* distinct de Ω.

On en déduit que $\frac{z'-z}{z'-\omega} = i$ et en interprétant le module de ce quotient comme $\frac{MM'}{M'\Omega} = |i| = 1$ et son argument comme $\left(\overrightarrow{\Omega M'};\ \overrightarrow{MM'}\right) = \arg\left(\frac{z'-z}{z'-\omega}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]$ alors on conclut que $\Omega MM'$ est isocèle et rectangle en M'.

2. Soit A_0 le point d'affixe $2+i$. On considère la suite $(A_n)_{n\in IN}$ de points du plan définie pour tout entier naturel *n* par $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel *n*, l'affixe a_n du point A_n est donnée par

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{i(n+2)\pi}{4}} + 2$$

Récurrence en utilisant la relation : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} z + 1 - i$.

b. Déterminer alors l'affixe de A_5 sous forme algébrique.

On a donc $a_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 e^{\frac{i(5+2)\pi}{4}} + 2 = \frac{4\sqrt{2}}{32} e^{\frac{7i\pi}{4}} + 2 = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) + 2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i + 2 = \frac{17}{8} - \frac{1}{8}i$.

3. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, le point A_n soit à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,01.

On aura A_n à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon $0{,}01$ lorsque $\Omega A_n < 0{,}01$ soit $|a_n - \omega| < 1$.

Or $|a_n - \omega| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{i(n+2)\pi}{4}} + 2 - 2\right| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{i(n+2)\pi}{4}}\right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Il s'agit donc de résoudre $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 0{,}01$ soit $n \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \ln 0{,}01$ donc $n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.

Or la valeur approchée de $\frac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ est $13{,}29$ au centième.

On aura donc A_n à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon $0{,}01$ lorsque $n \geq 14$.