Un nouveau raisonnement

Exercice 1 :

On définit la suite (u_n) pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et la relation pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4.
2. Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?
3. Afin de prouver cette conjecture, on va prouver que si $u_k = k^2$ pour un certain entier k (et non pas pour tous !!! Nuance…) alors on aura aussi au rang suivant la même égalité : $u_{k+1} = (k+1)^2$. On dit que la propriété est héréditaire.
4. Conclure et en déduire le calcul de $1 + 3 + 5 + \cdots + 2007$.

> Pour une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant de l'entier n, dont on veut prouver qu'elle est vraie pour tout entier n, on peut utiliser un raisonnement par récurrence, ou par induction.
>
> Ce raisonnement comporte 4 étapes :
> - **Initialisation** : On prouve que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
> - **Hypothèse de récurrence** : On suppose que $\mathcal{P}$ est vraie pour un certain entier k
> - **Hérédité** : Sous l'hypothèse de récurrence, on montre que $\mathcal{P}$ est également vraie pour $k+1$
> - **Conclusion**

⚠ L'initialisation est absolument nécessaire !

Exemple : Prouver que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire. Est-elle vraie pour autant ?

Exercice 2 : Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 3 : Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, $8^n - 1$ est divisible par 7.

Exercice 4 :

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{n + n^2} \geq n$.
2. En déduire par récurrence que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{n}$$
3. En déduire la limite de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 :

Selon l'inégalité triangulaire, pour tous réels x, y on a $|x + y| \leq |x| + |y|$. Montrer que pour tout entier naturel n et tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Exercice 6 : Monotonie d'une suite :

On considère la suite (u_n) à termes positifs définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Déterminer les premiers termes de la suite, conjecturer puis prouver ses variations.