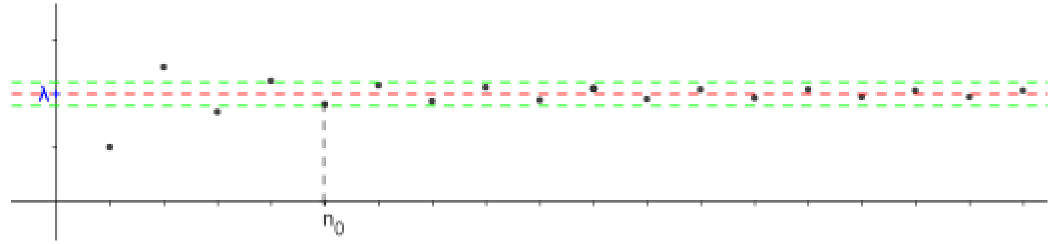
Chapitre 2 : Suites

1- Limite d'une suite :

1.1 Limite finie :

On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
ie pour tout réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il) il existe un rang n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \in]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$.



On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et on dit que la suite (u_n) est **convergente** de limite ℓ ou qu'elle converge vers ℓ.

1.2 Limite infinie :

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et on dit que la suite (u_n) est **divergente**.

Rqe : On dit aussi qu'une suite est **divergente** lorsqu'elle n'admet aucune limite, comme par exemple $u_n = (-1)^n$.

Théorème (admis) : Si la limite d'une suite existe alors elle est unique.

2- Théorèmes sur les limites :

2.1 Théorèmes de comparaison :

Théorème des gendarmes (dém)

> Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites, ℓ un réel. Si, à partir d'un certain rang, $w_n \leq u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Ex : La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\sin n}{n+1}$ a pour limite 0.

Théorème (ROC)

> Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites.
> Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $= \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
> Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $= \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2.2 Opérations sur les limites : Dans la suite, ℓ et ℓ' désignent des réels.

Somme						
limite de u_n	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
limite de v_n	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
limite de $u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit							
limite de u_n	ℓ	$\ell < 0$	$\ell > 0$	ℓ	∞	$-\infty$	$+\infty$
limite de v_n	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$-\infty$	$-\infty$
limite de $u_n v_n$	$\ell \times \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	0	FI	$+\infty$	$-\infty$

Quotient								
limite de u_n	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	0	0	0	$+\infty$	∞
limite de v_n	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	0^+	0	$\ell \neq 0$	$+\infty$	0^+	∞
limite de $\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	FI	0	0	$+\infty$	FI

3- Limites des suites arithmétiques et géométriques :

3.1 Suites arithmétiques :

Soit r un réel et (u_n) une suite arithmétique de raison r (on rappelle qu'alors $u_n = u_0 + nr$).
Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si $r < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Si $r = 0$, alors la suite est constante.

3.2. Suite géométrique $u_n = q^n$: Soit q un réel :

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. (ROC)
Si $q \leq -1$, alors la suite n'a pas de limite.

On en déduit la convergence d'une suite géométrique de raison q, selon la valeur de sa raison et le signe de son premier terme v_0 (on rappelle qu'alors $v_n = v_0 q^n$).

4- Convergence des suites monotones :

4.1 Vocabulaire :

Définition

On dit qu'une suite est **majorée par un réel M** si pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$. M est un **majorant** de la suite.
On dit qu'une suite est **minorée par un réel m** si pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$. m est un **minorant** de la suite.
Si la suite est majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**.

4.2 Etude des suites monotones :

Théorème

> Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
> Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Dém : Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit un réel A. La suite n'est pas majorée par A, donc il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$. La suite étant croissante, on a pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ et donc $u_n > A$. Tous les u_n à partir du rang n_0 sont dans l'intervalle $]A\,;+\infty[$. D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème de convergence monotone

> Toute suite croissante majorée est convergente.
> Toute suite décroissante minorée est convergente.

Dém : Soit (u_n) une suite croissante majorée par un nombre M. L'ensemble des majorants de la suite étant non vide, il possède un plus petit élément : A. Pour tout réel ε, $A-\varepsilon$ n'est pas un majorant donc il existe un rang n_0 tel que $A-\varepsilon < u_{n_0} \leq A < A+\varepsilon$. La suite étant croissante, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0}$ soit $A-\varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq A < A+\varepsilon$. Donc tous les termes de la suite à partir du rang n_0 sont dans l'intervalle $]A-\varepsilon\,;A+\varepsilon[$. Donc la suite (u_n) converge vers A.

Théorème

> Si (u_n) est une suite croissante convergeant vers ℓ alors pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.
> Si (u_n) est une suite décroissante convergeant vers ℓ alors pour tout entier naturel n, $u_n \geq \ell$.

Dém : Par l'absurde. Soit (u_n) une suite croissante convergeant vers ℓ. Supposons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. On note $2\varepsilon = (u_{n_0} - \ell)$. Alors $u_{n_0} > \ell + \varepsilon$. La suite étant croissante, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0} > \ell + \varepsilon$. L'intervalle $]\ell-\varepsilon\,;\,\ell+\varepsilon[$ ne contient pas une infinité de termes de la suite. Ce qui contredit le fait que ce soit la limite de la suite.

Théorème (dém)

> Toute suite convergente est bornée.

Attention la réciproque est fausse !

Contraposée du théorème : Une suite non bornée est divergente.