Limites de suites : exemples et contre exemples

Le but de cette activité est de faire le point sur vos connaissances sur les limites, de donner des exemples et des contre-exemples de comportements de suites. Si vous pensez qu'une assertion est fausse, donnez un contre-exemple, si vous pensez qu'elle est vraie, une illustration est bienvenue, mais cherchez une démonstration.

Vrai ou faux :

1. Une suite strictement croissante tend vers $+\infty$.

2. Une suite qui tend vers $+\infty$ est nécessairement croissante.

3. Une suite qui converge est majorée.

4. Une suite majorée converge.

5. Une suite qui converge est bornée.

6. Une suite bornée est convergente.

7. Une suite qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

8. Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée.

9. Une suite strictement croissante ne peut pas être majorée.

10. Si une suite ne converge pas, alors elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

11. Soit (un) une suite convergente, et M un réel.

Si pour tout n on a un < M, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$< M.

12. Une suite croissante, majorée par 2 converge vers 2

13. Soit (un) suite définie par une relation de récurrence de la forme :
$un + 1 = f(un)$ où f est une fonction. Alors :
- Si f est croissante, alors (un) aussi
- Si f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, alors (un) aussi
- Si $u1 = u0$ alors la suite est constante
- Si $u1 \geq u0$ alors la suite (un) est croissante.
- Si $u1 \geq u0$ et que f est croissante, alors la suite (un) est croissante.
- Si $u1 \leq u0$ et que f est décroissante, alors la suite (un) est croissante.
- Si pour tout x réel $f(x) > x$, alors la suite (un) est croissante.

Exercice 1

Prouver que si une suite est (un) croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Prouver que si elle existe, la limite d'une suite est unique. On pourra faire un raisonnement par l'absurde et s'aider d'une figure.

Exercice 3

Prouver à l'aide de la définition que :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Exercice 4

On considère la suite (un) définie par $u_0 = 10\ 000$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. En utilisant la fonction Ans de la calculatrice, faire une conjecture sur le comportement de la suite (un).

2. Prouver que tous les termes de la suite sont supérieurs à 1.

3. Déterminer le sens de variation de la suite (un).

4. En déduire la convergence de la suite vers une limite ℓ.

5. Justifier que ℓ vérifie $\sqrt{\ell} = \ell$.

6. Conclure.