DM2 – Suites, Récurrence, Algorithmique

Ce DM est composé de deux volets : le devoir écrit, à rendre sur feuille accompagné de la partie graphique faite à la main sur papier millimétré, et l'algorithme à rédiger sur la copie, dont on pourra également envoyer la version Algobox à cqueru@dalembert.cl.

Partie A : On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f par $f(x) = x(2-x)$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pout tout réel $x \in]0\,;1[$, on a $0 < f(x) < 1$.
3. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ pour x dans l'intervalle $[0\,;1]$. On prendra $8\ cm$ comme unité graphique.

Partie B : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in]0\,;1[$, et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$.

1- Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$ (on utilisera la première partie).

2- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3- Que peut-on en déduire pour cette suite ?

4- Calculer la limite de la suite (u_n).

5- Ecrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel tous les termes de la suite se trouvent dans l'intervalle $]1-\varepsilon\,;1[$ pour un ε choisi par l'utilisateur.

6- Dans cette question, on suppose que $u_0 = \frac{1}{2}$.

(a) En complétant le graphique de la partie A, représenter u_0, u_1, u_2 graphiquement.

(b) Calculer u_1, u_2, u_3.

(c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \frac{1}{2^{2^n}}$$

TS 2013ex p18 Pour le 9 avril 2013.

DM2 – Suites, Récurrence, Algorithmique

Ce DM est composé de deux volets : le devoir écrit, à rendre sur feuille accompagné de la partie graphique faite à la main sur papier millimétré, et l'algorithme à rédiger sur la copie, dont on pourra également envoyer la version Algobox à cqueru@dalembert.cl.

Partie A : On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction f par $f(x) = x(2-x)$.

1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pout tout réel $x \in]0\,;1[$, on a $0 < f(x) < 1$.
3. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ pour x dans l'intervalle $[0\,;1]$. On prendra $8\ cm$ comme unité graphique.

Partie B : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in]0\,;1[$, et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$.

1- Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$ (on utilisera la première partie).

2- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3- Que peut-on en déduire pour cette suite ?

4- Calculer la limite de la suite (u_n).

5- Ecrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel tous les termes de la suite se trouvent dans l'intervalle $]1-\varepsilon\,;1[$ pour un ε choisi par l'utilisateur.

6- Dans cette question, on suppose que $u_0 = \frac{1}{2}$.

(d) En complétant le graphique de la partie A, représenter u_0, u_1, u_2 graphiquement.

(e) Calculer u_1, u_2, u_3.

(f) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \frac{1}{2^{2^n}}$$