TS 2 avril 2013

NOM : ………………………..

DS1 – Suites

Exercice 1 : (3 points)

Réciter le théorème des gendarmes pour les suites.

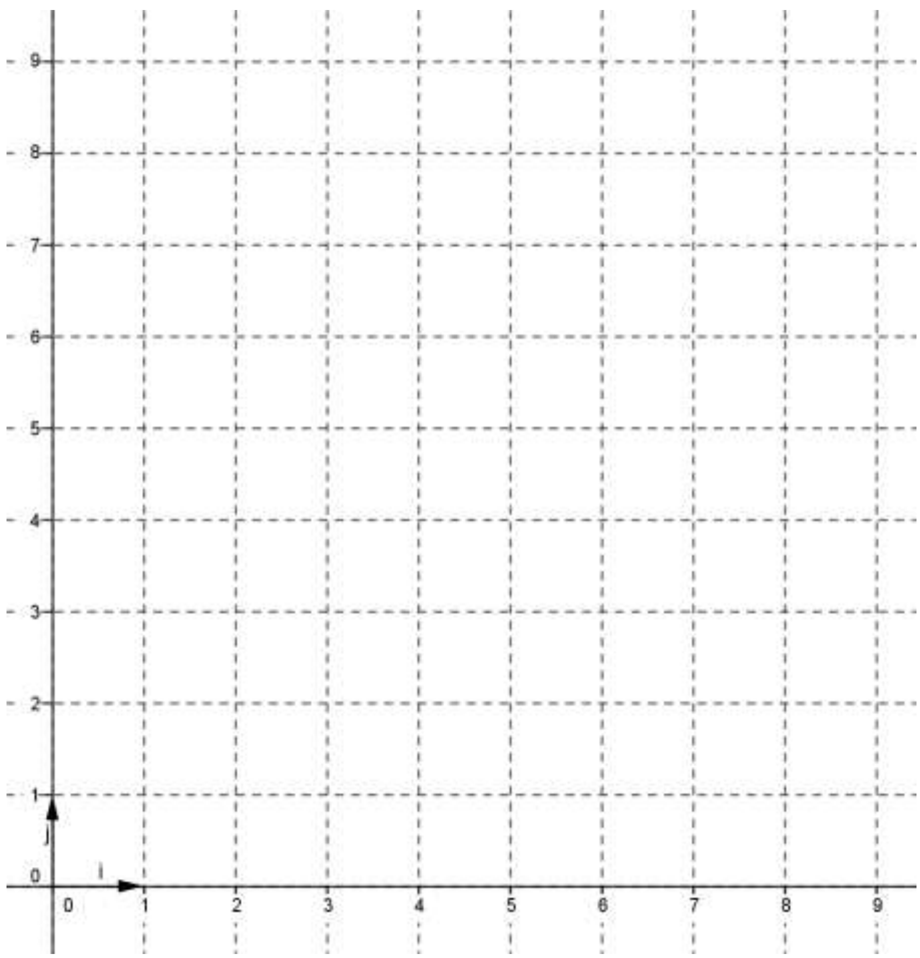
Exercice 2 : (7 points)

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{9} \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est croissante.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 1$.
3. Que peut-on en conclure sur la convergence de cette suite ?

Exercice 3 : (12 points) On définit une suite (u_n) par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - \frac{3}{2}$.

1. En traçant les droites $\Delta : y = \frac{7}{4}x - \frac{3}{2}$ et $d : y = x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses du repère ci-dessous.



2. On pose à présent pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 2$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique. Donner ses éléments caractéristiques.
   (b) Déterminer alors l'expression de $v_n$puis celle de u_n en fonction de n.
   (c) Donner le sens de variations de la suite (u_n) (récurrence inutile).
   (d) Etudier alors la convergence de la suite (u_n).

3. (a) Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche la plus petite valeur n_0 telle que $u_n \geq 100$:

```
Variables
      u, N : nombres
Initialisations
      N prend la valeur 0
      u prend la valeur ……………..
Début
      Tant que ……………………….
            u prend la valeur ……………..
            N prend la valeur ……………..
      Fin tant que
      Afficher …………..
Fin
```

(b) A l'aide de la calculatrice, déterminer n_0.

<u>**Exercice 4 :**</u> **(8 points)**

Dans chaque cas, dire si la proposition est Vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. On considère une suite (u_n) strictement décroissante et minorée par 2.

Proposition 1 : la suite (u_n) converge vers 2.

2. On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Proposition 2 : la suite (S_n) converge vers 3.

3. **Proposition 3 :** Toute suite bornée est convergente.

4. On considère une suite (u_n) de termes tous non nul et on pose $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

Proposition 4 : Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.