TS 3 avril 2013

NOM : ………………………..

<u>DS1 – Suites - Corrigé</u>

<u>Exercice 1 :</u> (3 points)

Réciter le théorème des gendarmes pour les suites. COURS !!

<u>Exercice 2 :</u> (7 points)

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{9}. \end{cases}$

1. **Démontrer par récurrence que cette suite est croissante.**

- On a $u_1 = \frac{2}{9}$, donc $u_1 > u_0$.
- *<u>Partie hérédité :</u>*

On suppose que pour un certain entier naturel k, on a $u_k < u_{k+1}$.

Alors $\frac{3}{4}u_k + \frac{2}{9} < \frac{3}{4}u_{k+1} + \frac{2}{9}$ ie $u_{k+1} < u_{k+2}$.

Donc la propriété est héréditaire.

2. **Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $\mathbf{n}$, $\mathbf{u_n \leq 1}$.**
   - On a $u_0 = 1$ donc $u_0 \leq 1$.
   - ***<u>Hérédité :</u>***

On suppose que pour un certain entier naturel k, on a $u_k \leq 1$. Alors $\frac{3}{4}u_k + \frac{2}{9} \leq \frac{3}{4} + \frac{2}{9}$ soit $u_{k+1} \leq \frac{35}{36} < 1$. D'où la propriété est bien héréditaire.

3. Que peut-on en conclure sur la convergence de cette suite ?

Cette suite est croissante et majorée. D'après le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente.

RQE : l'énoncé ne demande pas de déterminer la valeur de la limite de la suite !

<u>Exercice 3 :</u> (12 points) On définit une suite (u_n) par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - \frac{3}{2}$.

1. **En traçant les droites $\Delta : y = \frac{7}{4}x - \frac{3}{2}$ et $d : y = x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses du repère ci-dessous.**

Voir sur la copie.

2. On pose à présent pour tout entier naturel : $v_n = u_n - 2$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique. Donner ses éléments caractéristiques.

Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{7}{4}u_n - \frac{3}{2} - 2 = \frac{7}{4}u_n - \frac{7}{2} = \frac{7}{4}(u_n - 2) = \frac{7}{4}v_n$

D'où (v_n) est géométrique de raison $\frac{7}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$

(b) Déterminer alors l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

On a donc $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{7}{4}\right)^n$. D'où $u_n = v_n + 2 = \left(\frac{7}{4}\right)^n + 2$.

(c) Donner le sens de variations de la suite (u_n) (récurrence inutile).

On a $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{7}{4}\right)^n = \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(\frac{7}{4} - 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{3}{4}$. D'où $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entire naturel n et la suite (u_n) est donc croissante.

(d) Etudier alors la convergence de la suite (u_n).

$u_n = \left(\frac{7}{4}\right)^n + 2$. Or $\frac{7}{4} > 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{4}\right)^n = +\infty$. D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. (a) **Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche la plus petite valeur n_0 telle que $u_n \geq 100$:**

Variables u, N : nombres **Initialisations** N prend la valeur 0 u prend la valeur ………3……… **Début** Tant que ……$u < 100$…………………… u prend la valeur ……$\frac{7}{4}u + \frac{3}{2}$………… N prend la valeur …………$N + 1$…… Fin tant que Afficher ……$N - 1$……… **Fin**

(b) A l'aide de la calculatrice, déterminer n_0.

En faisant tourner l'algo, ou à l'aide de la touche « ANS », on trouve $n_0 = 6$.

__Exercice 4 :__ **(8 points)**

Dans chaque cas, dire si la proposition est Vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. **On considère une suite (u_n) strictement décroissante et minorée par 2.**

Proposition 1 : la suite (u_n) converge vers 2.

Faux ! Contre-exemple : $u_n = 3 + \frac{1}{n}$ est bien décroissante et minorée par 2, mais elle converge vers 3.

2. **On pose pour tout entier naturel n :**

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k}$$

Proposition 2 : la suite (S_n) converge vers 3.

On a pour tout n : $S_n = \frac{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{2}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

Or $\frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3$. La proposition est donc vraie.

3. **Proposition 3 : Toute suite bornée est convergente.**

Faux : contre-exemple absolument indispensable : $(-1)^n$: bornée par 1 et -1 mais divergente.

4. **On considère une suite (u_n) de termes tous non nul et on pose $v_n = -\frac{2}{u_n}$.**

Proposition 4 : Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

Faux car la suite (u_n) divergente n'admet pas nécessairement de limite. Cf contre-exemple avec $u_n = (-1)^n$.