DM2 – Corrigé.

Première partie :

1- Forme canonique de f : $f(x) = -4\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{25}{2}\right) = -4\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{25}{2}\right] = -4\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{225}{16}\right] = -4\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{225}{4}$.

2- Forme factorisée de f : $f(x) = -4\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{225}{16}\right] = -4\left(x - \frac{5}{4} - \frac{15}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4} + \frac{15}{4}\right) = -4(x-5)\left(x + \frac{5}{2}\right)$.

3-

(a) Calculer l'image de $\frac{5}{4}$ par f : forme canonique : $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{225}{4}$

(b) Calculer l'image de 5 par f : forme factorisée : $f(5) = 0$

(c) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$: forme factorisée, avec un tableau de signes, on trouve $f(x) \geq 0$ sur $\left[-\frac{5}{2}; 5\right]$

(d) On a $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{225}{4}$. Montrons que ce point est un maximum pour *f*. Soit x un réel. On a $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \geq 0$

Donc $-4\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \leq 0$ et $-4\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{225}{4} \leq \frac{225}{4}$. C'est-à-dire pour tout réel x : $f(x) \leq f\left(\frac{5}{4}\right)$.

Ce qui signifie que $\frac{225}{4}$ est le maximum de f sur IR et qu'il est atteint en $\frac{5}{4}$.

(e) Résoudre l'inéquation $f(x) < 50$: forme développée : $f(x) < 50$ s'écrit alors $-4x^2 + 10x < 0$ d'où $x(-4x + 10) < 0$. Un tableau de signes donne comme solution : $]-\infty; 0[\cup \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$

Deuxième partie :

On pose AM = x, avec $0 \leq x \leq \frac{10}{3}$. Alors AK = $2x$ et LC = $3x$.

$$A_{AKM} = \frac{2x^2}{2} = x^2;\ A_{KLB} = \frac{(10-2x)(10-3x)}{2} = 50 - 25x + 3x^2;\ A_{LDC} = \frac{10 \times 3x}{2} = 15x.$$

D'où $A_{MKLD} = A_{ABCD} - A_{AKM} - A_{KLB} - A_{LDC} = 100 - x^2 - 50 + 25x - 3x^2 - 15x = -4x^2 + 10x + 50 = f(x)$.

La position du point M sur [AD] pour que l'aire du quadrilatère MKLD soit maximale est lorsque $x = \frac{5}{4}$ d'après la première partie.