Chapitre 4 : Limites et continuité

I- Limites :

- On dit que la limite d'une fonction f est $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour toute valeur aussi grande choisie A, on peut trouver un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$, on ait $f(x) > A$. On note $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} f(x) = +\infty$.

- On dit que la limite d'une fonction f est $+\infty$ quand x tend vers un réel a lorsque pour toute valeur aussi grande choisie A, on peut trouver un intervalle ouvert autour de a tel que pour tout x dans cet intervalle, on ait $f(x) > A$. On note $\lim\limits_{x \longmapsto a} f(x) = +\infty$.

- On dit que la limite d'une fonction f est ℓ quand x tend vers $+\infty$lorsque pour tout intervalle ouvert I aussi petit soit-il autour de ℓ, on peut trouver un réel A tel que pour tout $x > A$, on ait $f(x) \in I$. On note $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} f(x) = \ell$.

Fonction carré

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Fonction inverse

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Fonction cube

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Fonction racine carrée

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

!!! Dire que $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} f(x) = +\infty$ ne signifie pas nécessairement que la fonction f est croissante.

Interprétation graphique :

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f.

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, , alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f, au voisinage de l'infini.

Graphiquement, la courbe se rapproche indéfiniment de son asymptote sans jamais l'atteindre de façon définitive.

Attention : Toutes les courbes représentatives de fonctions n'admettent pas forcément d'asymptote (les paraboles par exemple).

II- Calculs de limites :

On désigne par a un réel, ou l'infini, ℓ et ℓ' désignent des réels.

Somme						
$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Produit							
$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	$\ell < 0$	$\ell > 0$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)] =$	$\ell \times \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	0	FI	$+\infty$	$-\infty$

Quotient								
$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	0	0	0	$+\infty$	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	0^+	0	$\ell \neq 0$	$+\infty$	0^+	∞
$\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	FI	0	0	$+\infty$	FI

Limite de la composée de deux fonctions :

Soient deux fonctions f définie sur $\mathcal{D}_f$ et g définie sur $\mathcal{D}_g$.

La fonction $h = f \circ g$ est définie sur $\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D}_g,\ g(x) \in \mathcal{D}_f\}$ par $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g: \quad x & \longmapsto & g(x) & & \\ f: & & X & \longmapsto & f(X) \\ h = f \circ g : x & & \longrightarrow & & g(f(x)) \end{array}$$

Théorème : Soient trois fonctions f, g, h telles que $h = f \circ g$.

a, b, ℓ désignent des réels ou l'infini.

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} f \circ g(x) = \ell$.

III- Théorèmes de comparaison :

Ces trois théorèmes sont donnés pour x tendant vers $+\infty$, mais restent vrais en $-\infty$.

Théorème 1 : limite par minoration

Si pour x assez grand on a $f(x) \geq u(x)$ et si : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème 2 : limite par majoration

Si pour x assez grand on a $f(x) \leq u(x)$ et si : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 3 : limite par encadrement : dits « des gendarmes » :

Si pour x assez grand on a $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$ et si : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = a$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

Cas particuliers Règles opératoires :

- La limite d'un polynôme **en l'infini** est la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle **en l'infini** est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

IV- Continuité :

Dans tout le paragraphe, f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle contenu dans $\mathcal{D}_f$.

4.1. Définition :

- f est **continue** en un point a de I si $\boxed{\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = f(a)}$.
- f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Conséquence : d'après les règles opératoires sur les limites, la somme, le produit, la composée de deux fonctions continues sont également continues.

Contre-exemple, à connaître : La fonction partie entière.

Par convention, dans les tableaux de variations, les flèches obliques traduisent la **continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.**

4.2. Continuité des fonctions usuelles :

Théorème : (dém)

> Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel dans I. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

!!! La réciproque de cette propriété est fausse : contre-exemple, à connaître.

- Les fonctions usuelles sont donc continues sur leur ensemble de définition.

4.3. Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Corollaire :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique.

- *Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variation suffira pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type* $f(x) = k$.

- En particulier, si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

Extensions du corollaire :

Lorsque f est une fonction continue et strictement monotone, le résultat du corollaire s'étend à un intervalle quelconque (ouvert, semi-ouvert, borné ou non).