1ère S avril 2013

DS (3h) - Etude du trinôme – sujet A - Corrigé

Exercice 1 : (5 points) Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, justifier.

1. **Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole $\mathcal{P}$ de sommet S.**

(a) **Quand a est positif et Δ négatif, alors S est situé au-dessus de l'axe des abscisses.** Vrai, car la parabole est tournée vers le haut sans toucher l'axe des abscisses.

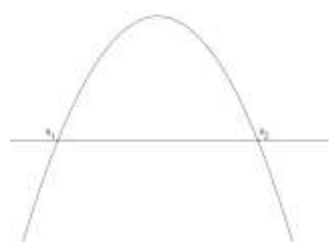
(b) **Quand Δ est positif et S est situé au-dessus de l'axe des abscisses, alors a est négatif.**

Vrai,, la parabole doit couper l'axe des abscisses en deux points donc $a < 0$.

(c) **L'ordonnée de S est toujours du même signe que Δ.**

Faux on peut très bien avoir un Δ négatif avec un sommet d'ordonnée positive : c-ex : $f(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$. $\Delta = -4$ *et* $S(1;1)$.

2. **Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole $\mathcal{P}$ ci-contre :**



(a) **a peut être positif** : faux la parabole est tournée vers le bas

(b) **Si $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$ alors le sommet est d'abscisse 2 :** faux, le sommet a pour abscisse la demi-somme des racines ie $\frac{4-2}{2} = 1$

(c) **Si x_1 et x_2 ont le même signe alors c est un nombre négatif :** Le produit des racines est $\frac{c}{a}$. Or ici $a < 0$ et $x_1 x_2 > 0$. D'où $c < 0$. Cette proposition est donc vraie.

Exercice 2 : (7 points) Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathbf{4x^2 + 8x + 3 = 0}$

$\Delta = 64 - 48 = 16$: l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-8-4}{8} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-8+4}{8} = -\frac{1}{2}$.

$$S = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$$

2. $\mathbf{\sqrt{2}x^2 - 3x - \sqrt{8} = 0}$

$\Delta = 9 + 16 = 25$: l'équation a deux solutions $x_1 = \frac{3-5}{2\sqrt{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$$S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ 2\sqrt{2}\right\}$$

3. $\mathbf{3x^4 - 13x^2 + 4 = 0}$

On reconnaît une équation bicarrée. On pose $X = x^2, X \geq 0$.

L'équation s'écrit : $3X^2 - 13X + 4 = 0$ (E')

$\Delta = 169 - 48 = 121$: l'équation (E') a deux solutions $X_1 = \frac{13-11}{6} = \frac{1}{3}$ et $X_2 = \frac{24}{6} = 4$

Les solutions de (E) vérifient donc $x^2 = \frac{1}{3}$ ou $x^2 = 4$. D'où les 4 solutions :

$$S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}; -2; 2; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Exercice 3 : (6 points)

1. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :**

(a) $\mathbf{-3x^2 - 5x + 2 = 0}$

Le trinôme $-3x^2 - 5x + 2$ a pour discriminant : $\Delta = 25 + 24 = 49$.

Il a donc deux racines : $x_1 = \frac{5-7}{-6} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{5+7}{-6} = -2$.

(b) $\mathbf{2x^2 + 5x - 12 \geq 0}$

Le trinôme $2x^2 + 5x - 12$ a pour discriminant : $\Delta = 121$.

Il a donc deux racines : $x_1 = \frac{-5-11}{4} = -4$ et $x_2 = \frac{-5+11}{4} = \frac{3}{2}$.

D'où $\mathbf{2x^2 + 5x - 12 \geq 0}$ **sur** $]-\infty\,;\,\mathbf{-4}] \cup [\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\,;\,+\infty[$ **.**

2. **En déduire l'ensemble de définition de la fonction :**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{\sqrt{-3x^2 - 5x + 2}}}$$

La fonction est définie pour $-3x^2 - 5x + 2 > 0$ donc sur $\left]-\frac{1}{3};2\right[$.

<u>Exercice 4 :</u> (4 points) Polynôme de degré 3.

(a) Déterminer une racine évidente du polynôme $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$.

On a $P(1) = 3 + 7 - 18 + 8 = 0$ donc 1est une racine évidente de P.

(b) En déduire sa factorisation sous la forme du produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.

Donc on peut écrire $P(x) = (x-1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2.

D'où :
$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) =$
$ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ où a, b, c *sont des réels*, $a \neq 0$.

Par identification des coefficients : $\begin{cases} a = 3 \\ b - a = 7 \\ c - b = -18 \\ -c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \\ c = -8 \end{cases}$.

D'où $P(x) = (x-1)(3x^2 + 10x - 8)$

(b) Résoudre alors dans IR l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Il faut déterminer le signe de $3x^2 + 10x - 8$: son discriminant est $\Delta = 196$. Ses racines sont donc $x_1 = -4$ *et* $x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 + 10x - 8$		+	0	-	0	+		+	
$x - 1$		-		-		-	0	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Alors $P(x) \geq 0$ *sur* $\left[-4\,;\frac{2}{3}\right] \cup [1\,;\,+\infty[$.

<u>Exercice 5 :</u> (8 points) Position relative de deux courbes :

On donne les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ et $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-5} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

On veut déterminer la position relative des deux courbes représentatives de f et g représentées ci-dessous :

Prouver la conjecture à l'aide d'une étude de signe.

On étudie le signe de $f(x) - g(x)$ afin de déterminer la position relative des courbes de ces fonctions.

On a $f(x) - g(x) = \frac{x-1}{2x-5} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2 - (x+1)(2x-5)}{(2x-5)(x-1)} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 2x + 5x + 5}{(2x-5)(x-1)} = \frac{-x^2 + x + 6}{(2x-5)(x-1)}$

On étudie le signe du trinôme $-x^2+x+6$:

Son discriminant est $\Delta = 25$. Il a donc deux racines $x_1 = -\frac{6}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{4}{-2} = -2$

D'où le tableau de signes :

!!!! Ne pas développer le dénominateur, sous forme factorisée, ses racines sont évidentes, ainsi que son signe.

x	$-\infty$		-2		1		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$-x^2+x+6$		-	0	+		+		+	0	-	
$(x-1)(2x-5)$		+		+	0	-	0	+		+	
$f(x)-g(x)$		-	0	+	||	-	||	+	0	-	

On en déduit que : $f(x)-g(x) > 0$ et donc que C_f est au-dessus de C_g sur $]-2\,;1[\cup]\frac{5}{2};3[$.

DS (3h) - Etude du trinôme – sujet B - Corrigé

Exercice 1 : (5 points) Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, justifier.

1. **Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole $\mathcal{P}$ de sommet S.**

   (a) Quand a est négatif et Δ positif, alors S est situé au-dessus de l'axe des abscisses.

Vrai car la parabole est tournée vers le bas et doit couper l'axe des abscisses en deux points.

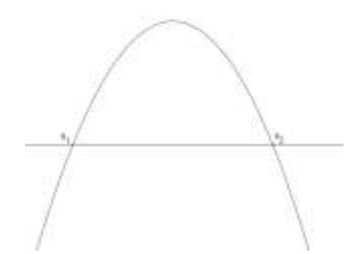
   (b) L'ordonnée de S est toujours du même signe que Δ.

Faux on peut très bien avoir un Δ négatif avec un sommet d'ordonnée positive : c-ex : $f(x) = (x-1)^2+1 = x^2-2x+2$. $\Delta = -4$ et $S(1;1)$.

   (c) Quand Δ est négatif et S est situé au-dessus de l'axe des abscisses, alors a est négatif.

Faux, au contraire la courbe ne doit pas couper l'axe des abscisses. Or si le sommet est situé au-dessus de l'axe des abscisses, la parabole doit être tournée vers le haut ie $a > 0$.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) représentée par une parabole $\mathcal{P}$ ci-contre :



(a) a et c sont de signes contraires : pas nécessairement, $\Delta > 0$ mais on n'a pas forcément a et c de signes contraires : par ex avec $f(x) = -2(x-1)(x-2)$, on a deux racines, donc $\Delta > 0$, une parabole tournée « vers le bas » avec $c = -4$ et $a = -2$. a et c peuvent donc avoir le même signe. Cette proposition est donc fausse.

(b) Si $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$ alors c est un nombre positif. Vrai car $c = f(0)$. Or si 0 est compris entre x_1 et x_2, alors

d'après les variations de la fonction, $f(0) > 0$ ie $c > 0$.
(ou raisonnement sur le produit comme ci-dessous).

(c) Si x_1 et x_2 ont le même signe alors c est un nombre négatif.

Le produit des racines est $\frac{c}{a}$. Or ici $a < 0$ et $x_1 x_2 > 0$. D'où $c < 0$. Cette proposition est donc vraie.

<u>Exercice 2 :</u> (7 points) Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathbf{8x^2 - 10x + 3 = 0}$

Le trinôme $8x^2 - 10x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 100 - 96 = 4$.

L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{10-2}{16} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

$$S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$$

2. $\mathbf{\sqrt{2}x^2 - 3x - 5\sqrt{2} = 0}$

Son discriminant est $\Delta = 9 + 40 = 49$. Il y a donc deux solutions :

$x_1 = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

3. $\mathbf{x^4 - 15x^2 + 36 = 0}$

On reconnaît une équation bicarrée. On pose $X = x^2,\ X \geq 0$.
L'équation s'écrit : $X^2 - 15X + 36 = 0$ (E')
$\Delta = 225 - 144 = 81$: l'équation (E') a deux solutions $X_1 = \frac{15-9}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{24}{2} = 12$
Les solutions de (E) vérifient donc $x^2 = 2$ ou $x^2 = 13$. D'où les 4 solutions :

$$S = \{-\sqrt{3};\ -2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$$

<u>Exercice 3 :</u> (4 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. **(a)** $\mathbf{-3x^2 + 10x + 8 > 0}$

Le trinôme $-3x^2 + 10x + 8$ a pour discriminant $\Delta = 100 + 96 = 196$.

Et donc pour racines $x_1 = \frac{-10-14}{-6} = 4$ et $x_2 = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}$.

Le trinôme est du signe de $a = -3$ à l'extérieur des racines, et positif entre les racines.

D'où $S =]\frac{-2}{3}; 4[$.

(b) $\mathbf{x^2 - 2x - 3 = 0}$

Son discriminant est $\Delta = 4 + 12 = 16$.

D'où deux solutions : $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.

2. **En déduire l'ensemble de définition de :**

$$f(x) = \frac{\sqrt{-3x^2 + 10x + 8}}{x^2 - 2x - 3}$$

Cette fonction est définie si $x^2 - 2x - 3 \neq 0$ et $-3x^2 + 10x + 8 \geq 0$ soit sur $\left[-\frac{2}{3}\,; 3\right[\cup\,]3\,; 4]$.

<u>Exercice 4 :</u> (4 points) Polynôme de degré 3.

(a) Déterminer une racine évidente du polynôme $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$.

On a $P(1) = 3 + 7 - 18 + 8 = 0$ donc 1est une racine évidente de P.

(b) En déduire sa factorisation sous la forme du produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.

Donc on peut écrire $P(x) = (x-1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2.

D'où :
$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) =$
$ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ *où a, b, c sont des réels, $a \neq 0$.*

Par identification des coefficients : $\begin{cases} a = 3 \\ b - a = 7 \\ c - b = -18 \\ -c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 10. \\ c = -8 \end{cases}$

$D'où\ P(x) = (x-1)(3x^2+10x-8)$

(b) Résoudre alors dans IR l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Il faut déterminer le signe de $3x^2+10x-8$: son discriminant est $\Delta = 196$. Ses racines sont donc $x_1 = -4\ et\ x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	-4		$\frac{2}{3}$		1	$+\infty$
$3x^2+10x-8$	+	0	-	0	+	|	+
$x-1$	-	|	-	|	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Alors $P(x) \geq 0\ sur\ \left[-4\,;\frac{2}{3}\right] \cup [1\,;\,+\infty[$.

<u>Exercice 5 :</u> (8 points) Position relative de deux courbes :

On donne les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ et $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-5} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

On veut déterminer la position relative des deux courbes représentatives de f et g représentées ci-dessous :

Prouver la conjecture à l'aide d'une étude de signe.

On étudie le signe de $f(x) - g(x)$ afin de déterminer la position relative des courbes de ces fonctions.

On a $f(x) - g(x) = \frac{x-1}{2x-5} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2-(x+1)(2x-5)}{(2x-5)(x-1)} = \frac{x^2-2x+1-2x^2-2x+5x+5}{(2x-5)(x-1)} = \frac{-x^2+x+6}{(2x-5)(x-1)}$

On étudie le signe du trinôme $-x^2+x+6$:

Son discriminant est $\Delta = 25$. Il a donc deux racines $x_1 = -\frac{6}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{4}{-2} = -2$

D'où le tableau de signes :

!!!! Ne pas développer le dénominateur, sous forme factorisée, ses racines sont évidentes, ainsi que son signe.

x	$-\infty$	-2		1		$\frac{5}{2}$		3	$+\infty$
$-x^2+x+6$	-	0	+	|	+	|	+	0	-
$(x-1)(2x-5)$	+	|	+	0	-	0	+	|	+
$f(x)-g(x)$	-	0	+	||	-	||	+	0	-

On en déduit que **:** $f(x) - g(x) > 0$ et donc que C_f est au-dessus de C_g sur $]-2\,;1[\cup]\frac{5}{2};3[$.