TS avril 2013

IE3 – Nombres complexes- Corrigé

Exercice 1 : QCM

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ? Justifier.

(a) Si $z+\bar{z}=0$ alors $z=0$: Faux. En effet, soit $z=a+ib$ un nombre complexe.

On a $z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow a+ib+a-ib=0 \Leftrightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur.

(b) Si $z+\frac{1}{z}=0$ alors $z=i$ ou $z=-i$. Vrai.

En effet : on a $z+\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z}=0 \Leftrightarrow z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=i \text{ ou } -i$.

(c) $\frac{1+i}{1-i}=i$: Vrai.

En effet : on a $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$.

Exercice 2 : Forme algébrique :

Mettre sous forme algébrique « $a+ib$ » les nombres complexes suivants :

- $\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}=\frac{(1+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i)}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}=\frac{\sqrt{2}+2i+i-\sqrt{2}}{2+1}=\frac{3i}{3}=i$
- On a $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}=-\frac{2i}{2i}=-1$
- $i+\frac{1}{i}=\frac{i^2+1}{i}=0$

Exercice 3 : Conjugué :

(a) *Prérequis :* pour tous nombres complexes z et z', on admet que $\overline{zz'}=\bar{z}\ \overline{z'}$ et que $\bar{x}=x$ lorsque x est réel. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$.

Soit z un nombre complexe non nul. On a $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\times\bar{z}=\overline{\left(\frac{1}{z}\times z\right)}=\bar{1}=1$. D'où $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$.

(b) Soit un nombre complexe z non nul.

On a : $\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}-\frac{\overline{(1+z)}}{\bar{z}}=\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)-\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}}=\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{\bar{z}}-1=\bar{z}-1$.

Exercice 4 : Equation de degré 4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-14z+65=0$.

Son discriminant est $\Delta=-64$. Celui-ci étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{14+8i}{2}=7+4i$ et $z_2=7-4i$.

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4-14z^3+74z^2-126z+585$.

2. **(a)** $P(3i)=81+14\times 27i-74\times 9-126\times 3i+585=81-666+585+378i-378i=0$.

Donc $3i$ est une racine de P.

(b) Montrer que si z est une racine de P alors $\bar{z}$ est aussi une racine de P.

On suppose que z est une racine de P ie $P(z)=0$. Montrons qu'alors $P(\bar{z})=0$. On a : $P(\bar{z})=\bar{z}^4-14\bar{z}^3+74\bar{z}^2-126\bar{z}+585=\overline{z^4}-\overline{14z^3}+\overline{74z^2}-\overline{126z}+585=\overline{P(z)}=\bar{0}=0$

D'où $\bar{z}$ est aussi une racine de P. On en déduit que $-3i$ ets une racine de P.

(c) Soit un trinôme Q tel que $P(z)=(z^2+9)Q(z)$. Alors Q est de degré 2 et de la forme : $Q(z)=z^2+bz+c$. Par identification des coefficients et unicité de l'écriture d'un polynôme, on déduit que $Q(z)=z^2-14z+65$. D'après la question 1, les racines de Q sont $7+4i$ et $7-4i$. Les racines de Psont donc $3i, -3i, 7-4i$ *et* $7+4i$.