Chapitre 5 : Loi Binomiale

1- Modélisation d'une répétition d'expériences :

1.1- Expériences indépendantes :

Deux expériences aléatoires sont dites indépendantes lorsque le résultat de l'une n'influence pas les probabilités de résultats de l'autre.
Lorsque l'on répète une **même expérience aléatoire** dans les **mêmes conditions initiales**, alors les expériences aléatoires sont **indépendantes**.

1.2- Répétition d'une même expérience :

- Propriété :

On répète n fois une expérience aléatoire E dans les mêmes conditions initiales. Si A_i est un événement de la $i-ème$ expérience, $(1 \leq i \leq n)$ alors on a :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \times p(A_2) \times \dots \times p(A_n)$$

- Représentation sur un arbre :

- Cas particulier :

Si $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, on note $p = p(A)$, alors

$$\boxed{p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p^n}$$

Exemple : Si la probabilité de gagner à un jeu est 0,7 et on y joue 3 fois de suite, la probabilité de gagner les trois parties est $p(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = p(G_1)p(G_2)p(G_3) = 0{,}7^3$, où G_i est la probabilité de gagner la ième partie.

2- Loi de Bernoulli :

On considère une expérience aléatoire à deux issues : S (succès) avec une probabilité p et $\bar{S}$ (échec) de probabilité $1-p$.

Cette situation constitue une **épreuve de Bernoulli.**
On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et 0 sinon.
X est appelée **variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p**.
La loi de cette variable aléatoire est appelée **Loi de Bernoulli.**

x	0	1
$p(X=x)$	$1-p$	p

Propriété :

Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance de X est $E(X) = p$
Sa variance est $V(X) = p(1-p)$
Son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)}$

Exemple :

On considère l'algorithme ci-contre. Quelles sont les valeurs que peut afficher ce programme ?

Soit X la variable aléatoire dont la valeur est celle affichée par l'algorithme. Quelle loi suit cette variable aléatoire ?

```
Variable : A : réel
Début
Affecter à A un nombre aléatoire réel compris entre 0 et 1
Si A ≤ 0,4 alors
    afficher 1
    sinon afficher 0
Fin Si
Fin
```

3- Loi binomiale :

3.1. Coefficients binomiaux :

Soient deux entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$.
Le nombre noté $\binom{n}{k}$ donne le nombre de façons d'obtenir k succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli (cette répétition est appelée « Schéma de Bernoulli »)
$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ est appelé **coefficient binomial** et se lit « combinaison de k parmi n ». (c'est aussi le nombre de parties à k éléments dans un ensemble de n éléments).

Remarques importantes :

- $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Propriétés :

❖ Pour tous entiers naturels n et p tels que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

❖ Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Conséquence : calcul des coefficients binomiaux : Triangle de Pascal :

La propriété précédente permet de calculer $\binom{n}{k}$:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1			$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$				
2	1	2	1			$=\binom{n}{k}$			
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

$\binom{5}{2}$

3.2. Définition de la loi binomiale :

Lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli (avec $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p = q$) on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès S au terme des n épreuves.
X prend les valeurs $\{0; 1; 2; \dots; n\}$.

La loi de X est alors donnée pour tout entier $k \in [|0\,;n|]$ par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On dit alors que la variable aléatoire suit une **loi binomiale de paramètres n et p** et on note $X \hookrightarrow B(n,p)$.

Son espérance est : $E(X) = np$ et sa variance $V(X) = npq$.

4- Loi binomiale et échantillonnage :

Exemple : on cherche à savoir si un dé est truqué. Pour cela on se demande si la fréquence d'apparition du 6 est normale. On lance 90 fois le dé. Soit X le nombre de fois où le 6 apparaît. S'il n'est pas truqué, alors X suit une loi binomiale de paramètre 90et $\frac{1}{6}$. Dans ce cas, $E(X) = 90 \times \frac{1}{6} = 15$. La face 6 doit donc apparaître en moyenne 15 fois sur les 90 lancers. L'intervalle de fluctuation à 95% est $\left[\frac{8}{90}\,;\frac{22}{90}\right]$ $(cf\ TP)$. Si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation à 95%, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est $\frac{1}{6}$ n'est pas remise en question et on l'accepte. Sinon, on rejette cette hypothèse.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
L'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation de X sur un échantillon de taille n est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$ où a, b sont définis par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.