DM - Dérivées des fonctions sinus et cosinus

I- Un calcul de limite :

1- On considère un réel $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$. Soit B le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. La perpendiculaire à (Ox) passant par le point $I(1\,;0)$ coupe la droite (OB) en A.

(a) Montrer que $IA = \tan x$.

(b) Déterminer l'aire du triangle OHB et OIA en fonction de x.

(c) Déterminer l'aire du secteur angulaire OIB en fonction de x.

(d) Comparer ces aires et en déduire que $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$.

2- Etendre le résultat précédent à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\,;0\right[$.

3- En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

4- Déterminer alors la dérivée de la fonction sinus en zéro.

II- Dérivée du cosinus en zéro :

1- Montrer à l'aide des formules de duplication que pour tout réel x non nul on a :

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$$

2- En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\, x-1}{x}$ et conclure.

III- Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus :

1- Soit $f(x) = \sin x$ et a un réel.

(a) Montrer à l'aides formules d'addition du sinus que pour tout réel h non nul on a :

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \sin a\frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h}\cos a$$

(b) Déterminer alors $f'(a)$.

2- Démontrer enfin la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction cosinus en utilisant la question précédente et la relation $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

DM - Dérivées des fonctions sinus et cosinus

I- Un calcul de limite :

1- On considère un réel $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$. Soit B le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses. La perpendiculaire à (Ox) passant par le point $I(1\,;0)$ coupe la droite (OB) en A.

(a) Montrer que $IA = \tan x$.

(b) Déterminer l'aire du triangle OHB et OIA en fonction de x.

(c) Déterminer l'aire du secteur angulaire OIB en fonction de x.

(d) Comparer ces aires et en déduire que $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$.

2- Etendre le résultat précédent à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\,;0\right[$.

3- En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

4- Déterminer alors la dérivée de la fonction sinus en zéro.

II- Dérivée du cosinus en zéro :

1- Montrer à l'aide des formules de duplication que pour tout réel x non nul on a :

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$$

2- En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\, x-1}{x}$ et conclure.

III- Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus :

1- Soit $f(x) = \sin x$ et a un réel.

(a) Montrer à l'aides formules d'addition du sinus que pour tout réel h non nul on a :

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \sin a\frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h}\cos a$$

(b) Déterminer alors $f'(a)$.

2- Démontrer enfin la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction cosinus en utilisant la question précédente et la relation $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.