Chapitre 6 : Compléments sur les fonctions

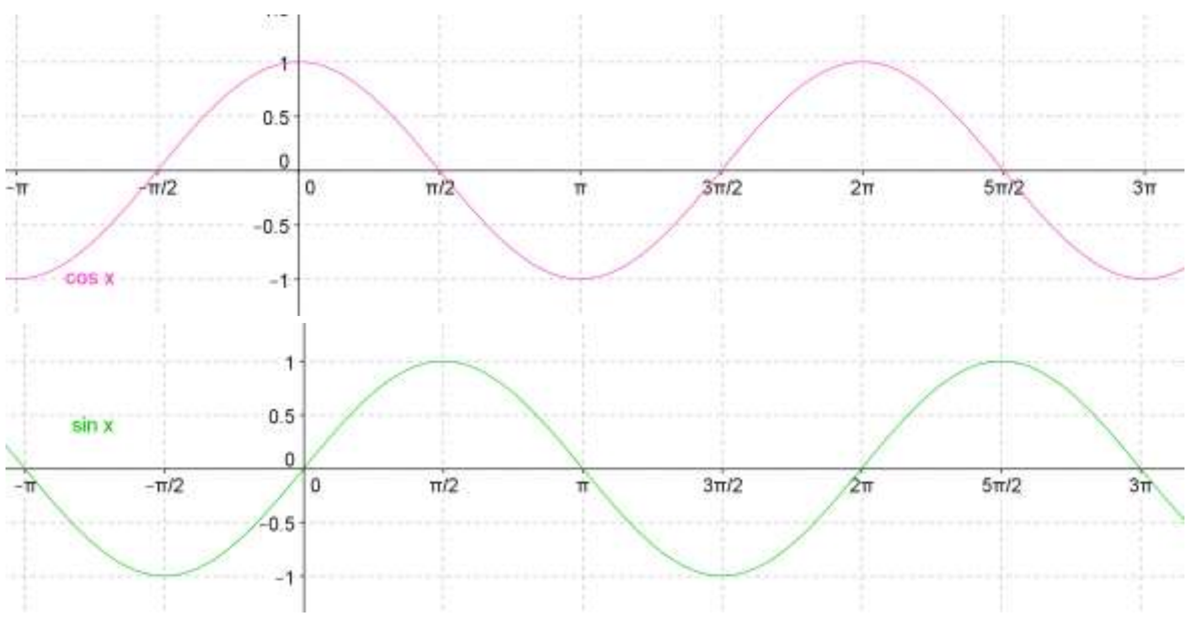
I. Fonctions trigonométriques :

1.1. Propriétés :

- Pour tout réel x on a :
  - $\cos(x+2\pi)=\cos x$: la fonction cosinus est **périodique de période 2π** : on peut réduire son étude à un intervalle de longueur 2π
  - $\cos(-x)=\cos x$: la fonction cosinus est **paire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- De même pour tout réel x on a :
  - $\sin(x+2\pi)=\sin x$: la fonction sinus est périodique de période 2π : on peut réduire son étude à un intervalle de longueur 2π
  - $\sin(-x)=\sin x$: la fonction sinus est **impaire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Pour tout réel x on a : $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \sin x \le 1$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.
- Pour tous réels a, b :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin\ b\cos a$$
$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\sin 2a=\ 2\sin a\cos a$$

1.2. Représentation graphique :



1.3. Dérivabilité :

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$ $\boxed{(\sin x)'=-\cos x}$

II. Compléments sur la dérivation :

2.1. Rappels : *On relira à ce propos le cours de première.*

- f est **dérivable en a** ssi la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers zéro (ou la limite quand x tend vers a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) existe et est finie.
- La courbe de f admet alors au point d'abscisse a une **tangente** d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
- Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est **constante** sur cet intervalle.
- Si $f'>0$ sur un intervalle I (sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule) alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si $f'<0$ sur un intervalle I (sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule) alors f est **strictement décroissante** sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est **constante** sur I.

2.2. Dérivée d'une composée :

g une fonction dérivable sur $\mathcal{D}'$, u une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{D}, u(x) \in \mathcal{D}'$.
Alors la fonction f définie par $f(x) = g(u(x))$ et notée $g \circ u$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et on a :

$$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$$

2.3. Formulaire :

Fonction	**Dérivée**	**Commentaire**
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	Sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	Sur $\mathbb{R}$ si $n > 0$ Sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$	Sur $\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Sur $\mathbb{R}^{+*}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto -\sin x$	Sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto \cos x$	Sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan x$	$x \longmapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	Sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	Sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln x$	$\frac{1}{x}$	Sur $]0 ; +\infty[$

$(u+v)' = u' + v'$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(ku)' = ku'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$	$\left(u(ax+b)\right)' = au'(ax+b)$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$(e^u)' = u'\, e^u$	$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$