Dérivation

I- Nombre dérivé d'une fonction en un point a :

a- Limite en zéro :

On considère un intervalle I ouvert contenant zéro et une fonction f définie au moins sur I ou sur $I-\{0\}$.

RQE : La fonction f n'est donc pas nécessairement définie en zéro !

- Si la fonction est définie en zéro la limite de f en zéro est $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
- Si la fonction n'est pas définie en zéro : on considère (lorsqu'elle existe) la valeur ℓ dont se rapprochent les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de zéro. On dit alors que ℓ est la limite de la fonction f en zéro et on note $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$.
- En pratique, on obtient une assez bonne idée de la valeur de cette limite (lorsqu'elle existe) en calculant les images par f de 0,1 ; 0,01 ; 0,001 et - 0,1 ; -0,01 ; - 0,001…

Exemples : Déterminer les limites suivantes : $a = \lim_{x\to 0} -3x+7$, $b = \lim_{x\to 0} \frac{1-5x}{4-x^2}$, $c = \lim_{x\to 0} \frac{3(x-2)^2-12}{x}$,

$$d = \lim_{x\to 0} \frac{3(x+2)^2+5}{x},\ e = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2}{x^2}.$$

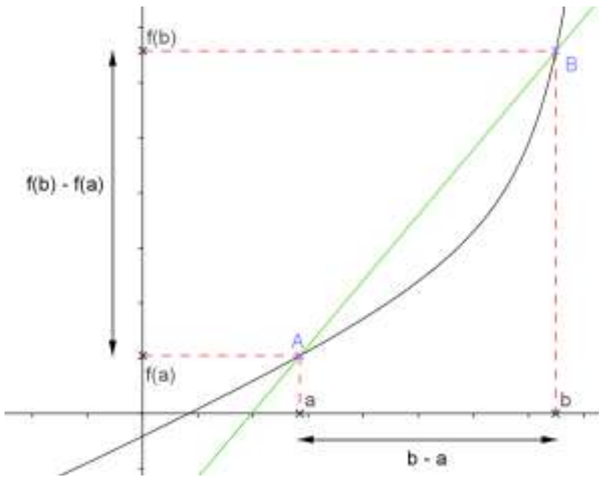
b- Taux d'accroissement d'une fonction :

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I, et a, b deux réels de I.

On appelle **taux d'accroissement** de f entre a et b le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

Rqe : il s'agit du coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe représentative de la fonction f.



c- Nombre dérivé :

La fonction f est dite dérivable en a s'il existe un nombre réel m tel que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = m$$

On appelle ce réel nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Il s'agit de la limite quand h tend vers zéro du taux d'accroissement de la fonction entre a et $a+h$.

Rqe : On peut aussi écrire

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$$

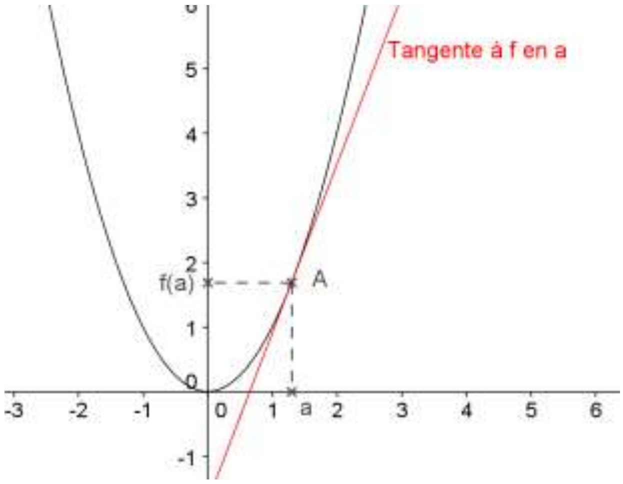
II- Tangente en un point à la courbe d'une fonction :

Soit une fonction f dérivable en a.

La courbe représentant f admet au point d'abscisse a une tangente dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



Dém : Soit une fonction f dérivable en a et soit $A(a; f(a))$ le point de la courbe de C_f d'abscisse a et M un point de C_f proche de A. On a donc $M(a+h\,; f(a+h))$ pour un réel h proche de zéro.

Considérons la sécante (AM) à la courbe C_f. Son coefficient directeur est $m = \frac{f(x_M)-f(x_A)}{x_M-x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, alors h tend vers zéro. Donc m tend vers $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Le coefficient directeur de la tangente en a est donc $f'(a)$.

On a donc $T: y = f'(a)x + p$, où p est l'ordonnée à l'origine de T. Or le point A est un point de C_f. Donc ses coordonnées vérifient l'équation de T ie : $y_A = f'(a)x_A + p$ ie $f(a) = af'(a) + p$. D'où $p = f(a) - af'(a)$.

Par suite, l'équation réduite de T est $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

III- Fonction dérivée :

a. **Définition :** Soit f une fonction définie sur un intervalle *I*. La fonction f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de *I*.

b. **Fonctions usuelles :** On démontre les résultats suivants :

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$ (k réel quelconque)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$ (m, p réels quelconques)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier naturel non nul quelconque)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$

IV- Opérations sur les fonctions dérivables :

- La somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions $u\ et\ v$ dérivables sur I est dérivable (sous les conditions de définition) (les résultats suivants sont à savoir démontrer).

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$(ku)' = ku'$$
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

V- Variations d'une fonction dérivable :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si sa dérivée ***f′* est strictement positive sur *I*** sauf en un certain nombre de points où elle s'annule, alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si sa dérivée f' est strictement négative sur I sauf en un certain nombre de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I alors la fonction f est constante sur *I*.

VI- Extremum d'une fonction dérivable :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- Si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leq f(x_0)$ alors $f(x_0)$ est le maximum de f sur I, atteint en x_0.
- Si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geq f(x_0)$ alors $f(x_0)$ est le minimum de f sur I, atteint en x_0.

Lien avec la dérivée :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.
Si sa dérivée **f' s'annule en a en changeant de signe alors f possède un extremum en a.**