

Tangente commune à une hyperbole et une parabole

On considère la fonction carré $f: x \mapsto x^2$ et la fonction inverse : $g: x \mapsto \frac{1}{x}$. On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs représentations graphiques respectives dans un repère du plan.

On s'intéresse au problème suivant : existe-t-il des droites tangentes à la fois à \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ?

Partie 1 : Conjecture :

A l'aide du logiciel GeoGebra, conjecturer la réponse au problème. On utilisera un curseur « a » et la commande tangente comme indiqué ci-après :

Saisie :	Tangente[a,f]
----------	---------------

Partie 2 : Preuve :

- (a) Déterminer une équation de la tangente en $A(a; a^2)$ à \mathcal{C}_f .
- (b) Déterminer une équation de la tangente en $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$ à \mathcal{C}_g .
- (c) Résoudre alors le système : $\begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{b} = 2ab - a^2 \end{cases}$ et conclure en répondant au problème.

Indication : On pourra vérifier que pour tout réel x , $x^3 + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$,