1ère S

DM – Géométrie vectorielle

Eléments de correction

Ex 109 p 339 - Droite d'Euler

1. **(a)** On a $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}$

Or $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$ car A' est le milieu de $[BC]$.

Donc $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$.

(b) On a alors $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Soit d'après la question précédente : $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.

(c) On en déduit que les droites (AH) et (OA') sont parallèles. Or (OA') est la médiatrice de $[BC]$, donc (OA') est perpendiculaire à (BC).

D'où (AH) est également perpendiculaire à (BC).

(d) On prouve que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OB'}$. D'où $\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{OB'}$. Il s'en suit que (BH) est également perpendiculaire à (AC).

(e) Le point H est donc l'intersection des hauteurs du triangle ABC, ie son orthocentre.

2. **(a)** On a $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\frac{2}{3}\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Soit $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{2A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{2A'A}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$.

(b) On a $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}$.

(c) On en déduit que les points $O, G\ et\ H$ sont alignés.

Ex 113 p 339 – Avec un paramètre

1. (d_m) passe par $A(-1;1)$ si les coordonnées du point A vérifient l'équation de (d_m) ie si $m^2x_A-(m-1)y_A-1=0$ soit $-m^2-(m-1)-1=0$ ce qui s'écrit encore : $-m^2-m=0\ ie-m\ (m+1)=0$.

Les deux valeurs de m pour lesquelles (d_m) passe par A sont $m=0$ et $m=-1$.

2. Le vecteur $\vec{u}(1\,;4)$ sera directeur de (d_m) s'il est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u_m}(m-1\,;m^2)$, c'est-à-dire ssi $m^2-4(m-1)=0$, ce qui s'écrit encore $m^2-4m+4=0$ soit $(m-2)^2=0$.

La seule valeur de m pour laquelle le vecteur $\vec{u}(1\,;4)$ est directeur de (d_m) est $m=2$.

3. La droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{v}(3\,;5)$. Elle sera donc parallèle à (d_m) ssi $\vec{v}$ et $\overrightarrow{u_m}$ sont colinéaires ie ssi $3m^2-5(m-1)=0$, ce qui s'écrit encore $3m^3-5m+5=0$.
   Ce polynôme de degré 2 a pour discriminant $\Delta=25-60=-35$. Il n'ya a donc pas de solution à cette équation ie pas de valeur de m pour laquelle (D) et (d_m) sont parallèles.