1ère S 30 mai 2013

# IE (1h) - Géométrie vectorielle - Corrigé

## Exercice 1 : (4,5 points) Quantificateurs :

Dans un repère, $d$ est la droite d'équation cartésienne : $3x + 2y - 6 = 0$.

Dire si chacune des propositions est vraie ou fausse. Justifier.

***a-*** Il existe un point de $d$ d'abscisse nulle. *Vrai, il s'agit de* $A(0\,;3)$

***b-*** Il existe un point $M\ (u\,;v)$ de $d$ tel que $u = v$. *Vrai, il s'agit de* $B\left(\frac{6}{5};\frac{6}{5}\right)$.

***c-*** Pour tout point $M(x\,;y)$ de $d$, $y \geq x$. *Faux :* $C(2\,;0)$ *est sur la droite mais* $y_C < x_C$.

## Exercice 2 : (7 points) Avec des coordonnées

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath})$.

On considère les points $A(-2\,;5), B(1\,;4), C(-2\,;\ -5), D(7\,;7), E(-4;\ -1)$ et $F(0\,;1)$.

**1.** Démontrer que les points $B, C, F$ sont alignés.

$\overrightarrow{BC}(-3\,;\ -9)\ et\ \overrightarrow{BF}(-1\,;\ -3)$ donc $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{BF}$, ces vecteurs sont donc colinéaires et les points $B, C, F$ sont alignés.

**2.** Démontrer que les droites $(AE)$ et $(BC)$ sont parallèles.

$\overrightarrow{BC}(-3\,;\ -9)\ et\ \overrightarrow{AE}(-2\,;\ -6)$ donc $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BF}$, ces vecteurs sont donc colinéaires et les droites $(AE)$ et $(BC)$ sont parallèles.

**3.** **a)** Déterminer l'équation de la droite $(AB)$.

Avec $\overrightarrow{AB}(3\,;\ -1)$ on trouve $(AB){:} - x - 3y + 13 = 0$.

**b)** Vérifier que l'équation de $(CD)$ est $4x - 3y - 7 = 0$.

Il suffit de vérifier que les coordonnées des points $C\ et\ D$ vérifient bien l'équation donnée.

**c)** Démontrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection $I$.

On vérifie que leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, puis en réslovant le système formé par leurs équations on trouve le point d'intersection : $I(4\,;3)$

**4.** Prouver alors que $B$ est le milieu du segment $[AI]$.

Le milieu de $[AI]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_I}{2};\frac{y_A+y_I}{2}\right)$ soit $(1\,;4)$. Il s'agit donc bien du point $B$.

## Exercice 3 : (5 points) Vecteurs

$ABC$ est un triangle. Le point $I$ est le milieu du segment $[AB]$. Les points $J$ et $L$ sont tels que :

$$2\,\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0} \text{ et } 3\,\overrightarrow{LC}=2\,\overrightarrow{LA}.$$

**1.** Faire une figure. (On justifiera la position de $J$ et $L$ par un calcul vectoriel).

On a $2\,\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

Soit $2\,\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

De même : $\overrightarrow{CL}=-2\,\overrightarrow{CA}$.

**2.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.

On a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

**3.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.

On a de même : $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{BA}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$.

**4.** Que peut-on en déduire concernant les points $I, J, L$ ? Justifier.

On a donc $\overrightarrow{IL}=5\overrightarrow{IJ}$, ces vecteurs sont donc colinéaires et les points $I, J, L$ sont alignés.

__Exercice 4 :__ **(3,5 points) Avec un paramètre**

Les droites $d_1$ et $d_2$ ont pour équations respectives : $3x-2y-8=0$ et $5x+4y-6=0$.

La droite $\Delta$ a pour équation $2mx-(m+1)y-8=0$où $m$ est un réel quelconque.

Comment choisir le réel $m$ pour que ces trois droites soient concourantes ?

Les droites $d_1$ et $d_2$ ont pour intersection (résolution du système) $A(2\,;\,-1)$.

Les trois droites seront concourantes si et seulement si le point $A$ est un point de $\Delta$ $ie$ ssi ses coordonnées vérifient l'équation de $\Delta$ , soit $4m+(m+1)-8=0$ $ie$ $m=\frac{7}{5}$.