TD : La méthode d'Euler

Partie 1 : Un problème de Leibniz : approche de la notion d'équation différentielle.

On cherche une fonction f strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal donné $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ a la propriété suivante : quel que soit le point M de la courbe $\mathcal{C}$, la tangente en M à $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point T tel que $\overrightarrow{TH} = \vec{\imath}$.

1. **a)** Pourquoi par hypothèse, $f'(x_0)$ est-il différent de zéro ?
   b) Trouver une équation de la tangente en M à $\mathcal{C}$.
   c) Déduisez-en que T a pour abscisse $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
2. **a)** Démontrer que $\overrightarrow{TH} = \vec{\imath}$ équivaut à $f'(x_0) = f(x_0)$.
   b) Déduisez-en que f convient si et seulement si $f' = f$.

Conclusion : pour déterminer f, on est conduit à résoudre une équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle figure la dérivée première de la fonction. Une telle équation est dite équation différentielle.

Partie 2 : La méthode d'Euler.

A l'équation différentielle $f' = f$, on ajoute la condition $f(0) = 1$.

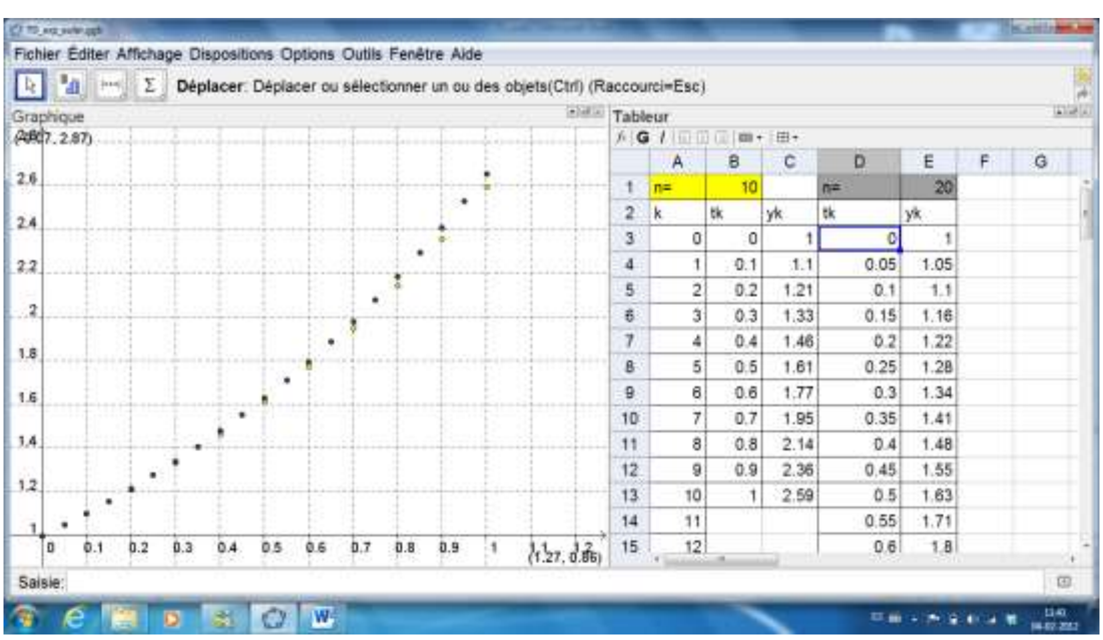
La méthode d'Euler permet de construire une solution approchée sur l'intervalle $[0; 1]$. Pour un entier naturel n non nul, on découpe l'intervalle en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $t_0 = 0$ et pour tout entier k, $t_{k+1} = t_k + \frac{1}{n}$, donc $t_n = 1$. On cherche à approcher la courbe en déterminant les valeurs approchées $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n)$ à l'aide de leurs approximations affines.

1. **Calcul de y_1 :** Comme on sait que $f(0) = 1$, on pose $y_0 = 1$.

Justifier que l'approximation affine de $f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right)$ est $1 + \frac{1}{n}$. On choisit $y_1 = 1 + \frac{1}{n}$.

2. **Calcul de y_{k+1} :** On suppose que l'on a construit $y_0, y_1, \ldots, y_k$.
   a) Justifier que l'approximation affine de $f\left(t_k + \frac{1}{n}\right)$ est $f(t_k)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On choisit $y_{k+1} = y_k\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
   b) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel k que $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$.

3. **Utilisation d'un tableur :** Il s'agit de calculer les valeurs approchées pour différentes valeurs de n.
   a) Pour $n = 10$, reproduire et compléter le tableau ci-dessous afin d'obtenir toutes les valeurs cherchées.
   b) A l'aide de l'assistant graphique (ou de la liste de points sur geogebra), faites afficher les points de coordonnées $(t_k; y_k)$ pour obtenir la courbe ci-dessous.
   c) Modifier la feuille de calcul pour obtenir les valeurs pour $n = 20$, puis $n = 30$ et observer à chaque fois la courbe obtenue. Quelles remarques peut-on faire ?



	A	B	C	D	E
1	n=	10		n=	20
2	k	tk	yk	tk	yk
3	0	0	1	0	1
4	1	0.1	1.1	0.05	1.05
5	2	0.2	1.21	0.1	1.1
6	3	0.3	1.33	0.15	1.16
7	4	0.4	1.46	0.2	1.22
8	5	0.5	1.61	0.25	1.28
9	6	0.6	1.77	0.3	1.34
10	7	0.7	1.95	0.35	1.41
11	8	0.8	2.14	0.4	1.48
12	9	0.9	2.36	0.45	1.55
13	10	1	2.59	0.5	1.63
14	11			0.55	1.71
15	12			0.6	1.8