Chapitre 7 : La fonction exponentielle

I- Etude de l'équation différentielle $f' = f$:

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$f' = f$ et $f(0) = 1$
Cette fonction se nomme fonction exponentielle et notée $\exp(x)$.

Démonstration :

- Existence prouvée plus tard, admise à ce point du cours.
- Unicité : ROC

Etape 1 : cette fonction vérifie $\boxed{f(x)f(-x) = 1}$

En effet, soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = f(x)f(-x)$.

Cette fonction est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables et on a pour tout réel x :

$$u'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)[-f'(-x)] = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

Cette fonction est donc constante. Or $u(0) = f(0)f(-0) = \left(f(0)\right)^2 = 1^2 = 1$.

D'où pour tout réel x : $u(x) = 1$ *ie* $f(x)f(-x) = 1$ **(1)**

Etape 2 : Cette fonction $\boxed{ne\ s'annule\ pas}$ (elle est donc strictement positive et par conséquent ($f' = f$) strictement croissante).

D'après la relation précédente **(1)**, il n'existe pas de réel tel que $f(x) = 0$. Dans le cas contraire, on aurait $f(x_0)f(-x_0) = 0 \times f(-x_0) = 0$ mais aussi $f(x_0)f(-x_0) = 1$ et donc $0 = 1$ ce qui est absurde.

Etape 3 : Considérons une autre fonction g possédant les mêmes propriétés : $g' = g$ *et* $g(0) = 1$.

On pose alors $h = \frac{g}{f}$ (h est bien définie car f ne s'annule pas).

La fonction h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables et on a :

$$h' = \frac{g'f - f'g}{f^2} = \frac{gf - fg}{f^2} = 0.$$

D'où la fonction h est une fonction constante, de valeur pour tout réel : $h(x) = h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

On en déduit que pour tout réel x $h(x) = 1$ soit $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ *ie* $g(x) = f(x)$.

La fonction f est donc unique, on la note $\exp(x)$, fonction exponentielle.

Rappel : on peut ébaucher la fonction exponentielle grâce à la méthode d'Euler (savoir le faire !).

II- Relation fonctionnelle caractéristique, propriétés de l'exponentielle :

2.1. Théorème :

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, distincte de la fonction nulle.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- Il existe un réel k tel que $f' = kf$ et $f(0) = 1$ (1)
- Pour tous réels x et y on a $f(x + y) = f(x)f(y)$. (2)

Démonstration :

- Condition nécessaire : supposons que la proposition (1) est vraie :

La fonction f est : $f(x) = \exp(kx)$ d'après le paragraphe précédent, donc elle ne s'annule pas.

Soit y un réel fixé. Posons pour tout réel : $\varphi(x) = \frac{f(x+y)}{f(y)}$.

Montrons que $\varphi(x) = f(x)$. Pour cela, vérifions que $\varphi' = k\varphi$ et $\varphi(0) = 1$.

On a en effet : $\varphi(0) = \frac{f(0+y)}{f(y)} = \frac{f(y)}{f(y)} = 1$ et pour tout réel : $\varphi'(x) = \frac{f'(x+y)}{f(y)} = \frac{kf(x+y)}{f(y)} = k\varphi(x)$.

D'où pour tout réel : $\varphi(x) = f(x)$, *ie* $f(x) = \frac{f(x+y)}{f(y)}$ soit $f(x)f(y) = f(x+y)$.

- Condition suffisante : supposons que la proposition (2) est vraie :

On dispose donc d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, distincte de la fonction nulle $f(x+y) = f(x)f(y)$. On veut prouver que $f(0) = 1$ et qu'il existe un réel k tel que $f' = kf$.

f étant non nulle, il existe donc un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

*On a alors $f(a+0) = f(a) \times f(0)$ ie $f(a) = f(a)f(0)$, or $f(a) \neq 0$, donc $f(0) = 1$.

* Soit y un réel quelconque et posons pour tout réel x : $\psi(x) = f(x+y) = f(x)f(y)$.

On a alors $\psi'(x) = f'(x+y) = f'(x)f(y)$. En particulier pour $x = 0$: $\psi'(0) = f'(y) = f'(0)f(y)$. En notant $k = f'(0)$ on a bien $f'(y) = kf(y)$ pout out réel y. D'où le résultat.

2.2. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

Pour tous réels x, y et entier relatif n, on a :

$$\exp(x) > 0 \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \qquad \exp(nx) = [\exp(x)]^n$$

Démonstration :

On sait que $exp'(x) = \exp(x)$, $\exp(0) = 1$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

- On a $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. Donc $\exp(x) \geq 0$.
- De plus soit $u(x) = \exp(x)\exp(-x)$. On prouve que u a une dérivée nulle, elle est donc constante, puis que $u(0) = 1$. D'où $u(x) = 1$ pour tout réel x. On en déduit à la fois que $\exp(x)\exp(-x) = 1$ et que $\exp(x)$ ne s'annule pas d'où $\exp(x) > 0$.
- D'après les résultats précédents, $\exp(x-y) = \exp\big(x + (-y)\big) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- Dernier point à prouver par récurrence.

2.3 Notation e^x :

La fonction exponentielle possédant les caractéristiques des fonctions puissances entières, on note $\boxed{\exp(x) = e^x}$ où e est l'image de 1 par la fonction exponentielle (cf TD 2 p 47 pour une première approximation par des suites du nombre e).

Justification : pour un entier naturel n, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n = e^n$

Info : e est au même titre que π un nombre irrationnel et transcendant (ie racine d'aucun polynôme à coefficients entiers). Sa notation est dûe au mathématicien suisse Léonhard Euler, vers 1728.

En résumé on a donc :

$$\boxed{\begin{array}{ll} e^x > 0, & e^0 = 1 \\ e^{x+y} = e^x e^y & e^{nx} = (e^x)^n \\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} & e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \end{array}}$$

III- Etude de la fonction exponentielle :

3.1. Variations :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} e^a < e^b \Leftrightarrow a < b \\ e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \\ e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \end{array}}$$

Démonstration :

1- $e'(x) = e(x)$ et $e(x) > 0$. Donc l'exponentielle est strictement croissante.
2- Vient directement de la croissance stricte de la fonction exponentielle.
3- La fonction exponentielle étant dérivable et strictement monotone de $]-\infty; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$, c'est une bijection entre ces deux ensembles. D'où le résultat.
4- Application du point 2, tenant compte du fait que $e^0 = 1$.

3.2. Limites, tableau de variations et courbe :

- Ces limites sont à connaître, il faut également savoir les démontrer…

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \end{array}}$$

Démonstration : ROC

Etape 1 : on prouve que pour tout réel x, $\boxed{e^x > x}$

Posons pour tout réel x, $u(x) = e^x - x$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x) = e^x - 1$. D'où $u'(x) > 0$ ssi $x > 1$. On en déduit les variations de u :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$		$+$
$u(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

D'où on déduit que pour tout réel x, $1 > 0$, *ie* $e^x - x > 0$, donc $e^x > x$.

Par suite :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Etape 2 : On en déduit immédiatement que :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

Etape 3 :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e'^0 = e^0 = 1$$

- Tableau de variations et courbe, à connaître également :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
e^x	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$