Baccalauréat Blanc

Mathématiques

Terminale S

Enseignement obligatoire

- Durée de l'épreuve : 4 heures
- Coefficient 7

Ce sujet comporte 4 exercices.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat veillera à ce que lui soit remis le sujet correspondant à sa spécialité.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : Polynésie 2012 – 6 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables U réel, k, N entiers naturels
Entrée
Saisir le nombre entier naturel N non nul
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$
Affecter à U la valeur $3U-2k+3$
Fin Pour
Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$? Justifier.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

(a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

(b) Justifier que $n_0 \leq 3p$.

(c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

(d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

Exercice 2 : Amérique du sud, Novembre 2011– 4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D où :

$$z_A = 1 + 2i, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_C = 1 + \sqrt{3} + i, \quad z_D = \overline{z_C}$$

   (a) Placer les points A et B dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

   (b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

   (c) En déduire la nature du triangle ABC.
3. Démontrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
4. Construire alors les points C et D dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Expliquer la construction.

Exercice 3 : 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1. Pour tout réel x, calculer $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$, puis justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre -2 et -1. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Pour tout réel x calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. **(a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x)$.

   (b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ que l'on précisera.

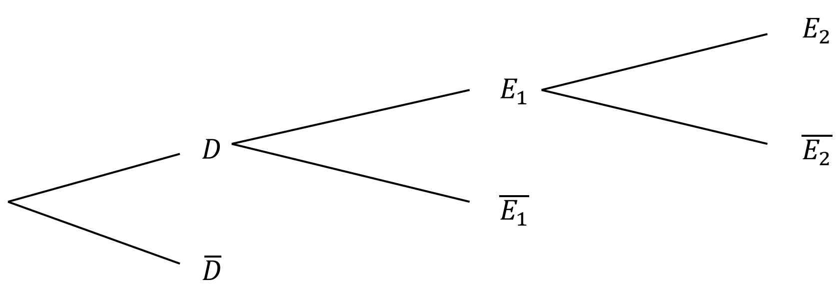
   (c) Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ: $y = x$. Préciser les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
5. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ ? Si oui, déterminer les abscisses de ces points.

Exercice 4 : Métropole juin 2012 – 4 points

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.
40 %des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.
Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
On considère les évènements suivants :
– D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
– E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
– E_2 : « Le candidat est recruté ».

(a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



(b) Calculer la probabilité de l'événement E_1.

(c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ». Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.
On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

(b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?