Baccalauréat Blanc

Mathématiques Terminale S

CORRIGE

Exercice 1 : Polynésie 2012 – 6 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables U réel, k, N entiers naturels
Entrée
  Saisir le nombre entier naturel N non nul
Traitement
  Affecter à U la valeur 0
  Pour k allant de 0 à $N-1$
    Affecter à U la valeur $3U-2k+3$
  Fin Pour
Sortie
  Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$? Justifier.

On remplit un tableau pour décrire les étapes de l'algorithme.

U	k	N	Commentaire
0		3	Initialisation
3	0		Entrée dans la boucle Pour
10	1		
29	2		Sortie de boucle Pour
Affichage $U = 29$			

L'algorithme affiche 29.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

On a $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$

Et $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 9 - 2 + 3 = 10$

2. **(a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul $n, u_n > n$.

On a $u_1 = 3$ et $3 > 1$ donc $u_1 > 1$, la propriété est initialisée.

Supposons que pour un e naturel non nul k on ait : $u_k > k$, alors $3u_k > 3k$ et $3u_k - 2k > k$, d'où $3u_k - 2k + 3 > k + 3 > k + 1$ ie $u_{k+1} > k + 1$. La propriété est donc héréditaire.

Par récurrence, cette propriété est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et pour tout entier naturel non nul $n, u_n > n$, par comparaison, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

On a $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3$. Or $u_n > n$ pour tout n donc $2u_n - 2n > 0$ et bien sûr $2u_n - 2n + 3 > 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$. D'où la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = u_{n+1} - n = 3u_n - 2n + 3 - n = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$$

D'où (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 q^n = 3^n$. Donc $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

(a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0, u_n \geq 10^p$?

On peut l'affirmer car la limite de u_n est $+\infty$, tous les termes à partir d'un certain rang dépassent donc le nombre 10^p.

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

(b) Justifier que $n_0 \leq 3p$.

On a $u_n = 3^n + n - 1$, donc $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1$ donc $u_{3p} > 10^p$ (car $p > 0$). La suite (u_n) étant croissante, a donc pour tout $n \geq 3p$, $u_n \geq u_{3p} \geq 10^p$.

Or n_0 est le plus petit entier possédant cette propriété. Donc $3p \geq n_0$.

(c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

On a $u_6 = 734$ *et* $u_7 = 2193$, donc pour $p = 3, n_0 = 7$.

(d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

```
Variables : U, k, p : nombres entiers
Début :
Lire p
k prend la valeur 0
U prend la valeur 0
Tant que U < 10^p faire
   U prend la valeur 3U − 2k + 3
   k prend la valeur k + 1
Fin tant que
Afficher k          %% ce k est le n0 cherché
Fin algo
```

Exercice 2 : Amérique du sud, Novembre 2011– 4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 4 - 20 = -16$.

L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D où :

$$z_A = 1 + 2i, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_C = 1 + \sqrt{3} + i, \quad z_D = \overline{z_C}$$

(a) Placer les points A et B dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

(b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1 - 2i - 1 - \sqrt{3} - i}{1 + 2i - 1 - \sqrt{3} - i} = \frac{-3i - \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}} = \frac{(-3i - \sqrt{3})(i + \sqrt{3})}{-1 - 3}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3 - 3\sqrt{3}\, i - \sqrt{3}\, i - 3}{-4} = \frac{-4\sqrt{3}\, i}{-4} = i\sqrt{3}$$

(c) En déduire la nature du triangle ABC.

On sait que $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}\right)$. Or ici $\arg i\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$. Donc $\left(\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

Le triangle ABC est donc rectangle en C.

3. Démontrer que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

ABC est rectangle en C. Le point C est donc situé sur le cercle de diamètre l'hypoténuse $[AB]$.

(1)Vérifions que D est également sur ce cercle en montrant de même que l'angle $\left(\overrightarrow{DA};\ \overrightarrow{DB}\right)$ est droit :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = \arg\left(\frac{z_B - \overline{z_C}}{z_A - \overline{z_C}}\right) = \arg\left(\frac{\overline{z_A} - \overline{z_C}}{\overline{z_B} - \overline{z_C}}\right) = \arg\overline{\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)} = -\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = -\arg(\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)^{-1}) = \arg\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2}\quad [2\pi].$$

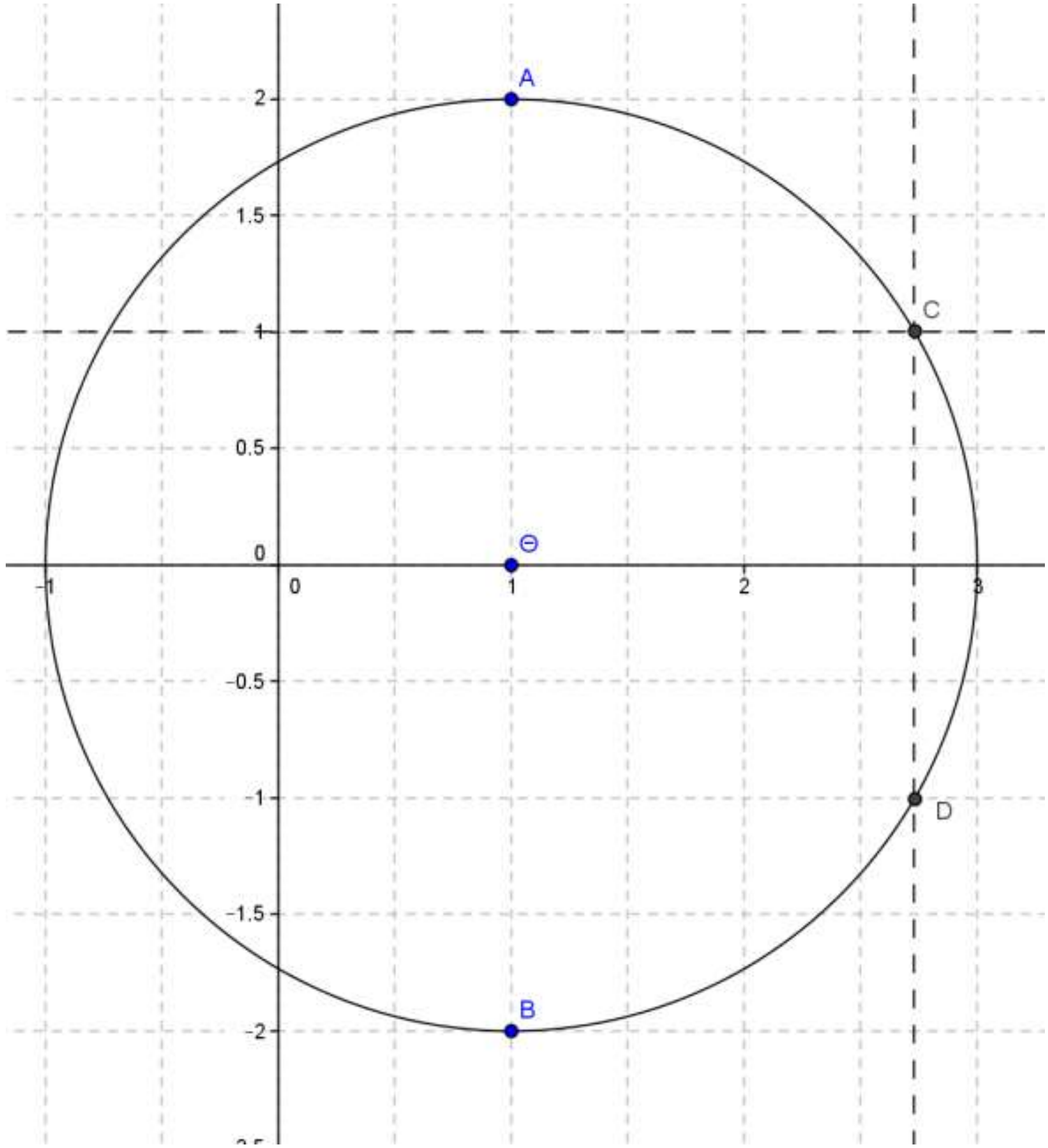
(2)On peut aussi calculer l'affixe du centre du cercle, Ω milieu de $[AB]$, et vérifier que $\Omega D = \frac{AB}{2}$:

- $z_\Omega = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = 1$
- $\Omega D = \left|1 - 1 - \sqrt{3} + i\right| = \left|-\sqrt{3} + i\right| = 2$
- $AB = |1 + 2i - 1 + 2i| = |4i| = 4$

Les trois points sont donc bien situés sur le cercle de diamètre $[AB]$, dont le centre est $\Omega(1)$ et de rayon 2

4. Construire alors les points C et D dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Expliquer la construction.

On place A, B, Ω grâce à leurs affixes, on trace le cercle de centre Ω passant par A, C a pour ordonnée 1 et est situé sue le cercle, avec une abscisse positive $(1 + \sqrt{3})$ et enfin D est le symétrique de C par rappoort à l'axe réel.



<u>Exercice 3 : 6 points</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1. Pour tout réel x, calculer $g'(x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et on a $g'(x) = 3x^2 + 3$

2. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$, puis justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre -2 et -1. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Il est évident que $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $g(-2) = -6$ et $g(-1) = 4$.

La fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et sachant que $g(-2) < 0$ et $g(-1) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre -2 et -1.

A l'aide de la fonction table de la calculatrice, on trouve :

$g(-1{,}6) < 0 \; et \; g(-1{,}5) > 0$ donc $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$

$g(-1{,}52) < 0 \; et \; g(-1{,}51) > 0$ donc $-1{,}52 < \alpha < -1{,}51$

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

En factorisant numérateur et dénominateur par leur terme de plus haut degré, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel x calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$.

On trouve bien $f'(x) = \frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

On utilise le signe de g déterminé en partie A :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$f(\alpha) \cong -2{,}27$	↗	$+\infty$

4. **(a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{x^2+1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4-x}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\frac{4}{x}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(-\frac{4}{x}-1\right)}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

De même en $+\infty$.

Il s'agit de bien détailler ces calculs et les étapes menant au résultat final.

(b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ que l'on précisera.

D'après la question précédente, $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y = x$ (1ère bissectrice du plan).

(c) Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ: $y = x$. Préciser les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et Δ.

On a $f(x) - x = \frac{-4-x}{x^2+1}$, du signe de $-4-x$, x^2+1 étant positif sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}_f$ et Δ sont donc sécantes au point d'abscisse -4, $A(-4\,;\,-4)$.

Avant le point A, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ.

Après le point A, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de Δ.

5. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ ? Si oui, déterminer les abscisses de ces points.

On cherche les réels x tels que $f'(x) = 1$. Or cette égalité s'écrit :

$\frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 + 8x = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 1 = 0.$

Or cette équation a pour solutions $x_1 = -\sqrt{17} - 4$ et $x_2 = \sqrt{17} - 4$.

En les deux points ayant pour abscisses respectives x_1 et x_2, la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ .

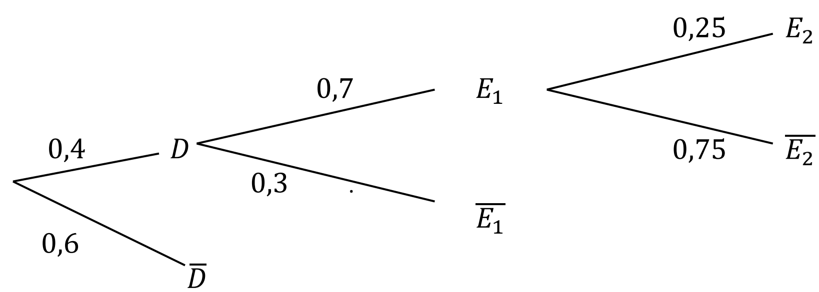
Courbe en page 9

Exercice 4 : Métropole juin 2012 – 4 points

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.
40 %des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.
Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
On considère les évènements suivants :
– D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
– E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
– E_2 : « Le candidat est recruté ».

(a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



(b) Calculer la probabilité de l'événement E_1.

On a $P(E_1) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$.

(c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ». Démontrer que la probabilité de l'évènement *F* est égale à 0,93.

$$P(F) = P(\overline{D}) + P(\overline{E_1}) + P(\overline{E_2}) = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}75 = 0{,}6 + 0{,}12 + 0{,}21 = 0{,}93$$

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.
On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

(a) Justifier que *X* suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

On assimile le recrutement de ces 5 amis à la répétitions 5 fois de la même expérience à deux issues (succès : « être recruté », échec : « ne pas être recruté »), avec une probabilité de succès de 0,07, de façon indépendante. Il s'agit donc de la répétition de façon indépendante d'un schéma de Bernoulli, 5 fois. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres 5 et 0,07.

(b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

Il s'agit seulement de calculer $P(X = 2) = \binom{5}{2} 0{,}07^2 0{,}93^3 \cong 0{,}039$.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

Avec le même raisonnement, on montre que lors de l'examen de n dossier, la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes recrutées suit une loi binomiale de paramètres n et 0,07. Il s'agit donc de déterminer n tel que $P(X \geq 1) \geq 0{,}999$, ou autrement dit que $P(X = 0) \leq 0{,}001$.

Or $P(X = 0) = 0{,}93^n$.

A la calculatrice on trouve :

n	$0{,}93^n$
21	0,21784
77	0,00374
95	0,00101
96	0,00094

Il faut donc rencontrer au moins 96 personnes.

Exercice 3 : Courbe