TS 2013

DM - Irrationalité de e

Premier encadrement : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (x-1)$.

1- **a)** Etudier les variations de f. En déduire que pour tout réel x, $1 + x \leq e^x$ $\quad(\mathbf{1})$

b) Démontrer alors que pour tout réel $x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ $\quad(\mathbf{2})$

2- n est un entier supérieur ou égal à 2.

a) Démontrer à partir de (1) que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

b) De même, démontrer à partir de (2) que $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

On obtient donc l'encadrement : $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} \leq \boldsymbol{e} \leq \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n+1}}$ $(\mathbf{3})$ pour $n \geq 2$.

c) En déduire que $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Deuxième encadrement : n est un entier supérieur ou égal à 2, g et h des fonctions définies sur $[0;1]$ par : $g(x) = e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$ et $h(x) = g(x) + e^{-x}\,\frac{x^n}{n!}$.

1- **a)** Etudier les variations de g et h sur $[0;1]$.
b) En déduire que $g(1) < 1$ et $h(1) > 1$.

2- Démontrer alors que :

$$\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!} < \boldsymbol{e} < \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!} \quad (\mathbf{4})$$

Irrationalité de e : On suppose e rationnel, alors $e = \frac{p}{q}$ avec p, q des entiers.

1- En utilisant (4), prouver que $n!\,e$ est encadré par deux entiers consécutifs a_n et a_{n+1}.

2- **a)** Prouver que si $q \leq n$, alors $\frac{n!p}{q}$ est un entier. En déduire que $q \leq n$ est impossible.

b) En déduire que $q > n$, quel que soit l'entier $n, n \geq 1$. Conclure que e est irrationnel.

TS 2013

DM - Irrationalité de e

Premier encadrement : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (x-1)$.

1- **a)** Etudier les variations de f. En déduire que pour tout réel x, $1 + x \leq e^x$ $\quad(\mathbf{1})$

b) Démontrer alors que pour tout réel $x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ $\quad(\mathbf{2})$

2- n est un entier supérieur ou égal à 2.

a) Démontrer à partir de (1) que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

b) De même, démontrer à partir de (2) que $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

On obtient donc l'encadrement : $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} \leq \boldsymbol{e} \leq \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n+1}}$ $(\mathbf{3})$ pour $n \geq 2$.

c) En déduire que $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Deuxième encadrement : n est un entier supérieur ou égal à 2, g et h des fonctions définies sur $[0;1]$ par : $g(x) = e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$ et $h(x) = g(x) + e^{-x}\,\frac{x^n}{n!}$.

1- **a)** Etudier les variations de g et h sur $[0;1]$.
b) En déduire que $g(1) < 1$ et $h(1) > 1$.

2- Démontrer alors que :

$$\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!} < \boldsymbol{e} < \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!} \quad (\mathbf{4})$$

Irrationalité de e : On suppose e rationnel, alors $e = \frac{p}{q}$ avec p, q des entiers.

1- En utilisant (4), prouver que $n!\,e$ est encadré par deux entiers consécutifs a_n et a_{n+1}.

2- **a)** Prouver que si $q \leq n$, alors $\frac{n!p}{q}$ est un entier. En déduire que $q \leq n$ est impossible.

b) En déduire que $q > n$, quel que soit l'entier $n, n \geq 1$. Conclure que e est irrationnel.