Corrigés des exercices et problèmes

Exercices d'application

7 Pour la fonction exponentielle :
$f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. Ici $f'(x) = -f(x)$,
donc $f(x) = -f(x)$.
Donc pour tout x réel, $f(x) = 0$. Mais $f(0) = 1$, ce qui aboutit à une contradiction.
D'où f ne peut pas être égale à la fonction exponentielle.

8 Équation d'une tangente en $x = a$:
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Ici $a = 0$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = f(0) = 1$.
D'où $y = (x - a) + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

9 Équation d'une tangente en $x = a$:
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Ici $a = 1$, $f(-1) = \exp(-1)$ et $f'(-1) = f(-1) = \exp(-1)$.
D'où $y = \exp(-1)(x + 1) + \exp(-1) \Leftrightarrow y = \exp(-1)(x + 2)$.

10 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

11 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

12 **a.** $f(-1) = \exp(-1)$, $f(0) = 1$ et $f(1) = \exp(1)$.

b. $f'(x) = (\exp(1) + \exp(-1) - 2)x + \dfrac{\exp(1) - \exp(-1)}{2}$.

Si f était égale à la fonction exponentielle, on aurait :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} f'(-1) = \exp(-1) \\ f'(0) = 1 \\ f(1) = \exp(1) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\left(\exp(1)+\exp(-1)-2\right)+\dfrac{\exp(1)-\exp(-1)}{2} = \exp(-1) \\ \dfrac{\exp(1)-\exp(-1)}{2} = 1 \\ \left(\exp(1)+\exp(-1)-2\right)+\dfrac{\exp(1)-\exp(-1)}{2} = \exp(1) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exp(1)+5\exp(-1) = 4 \\ \exp(1)-\exp(-1) = 2 \\ \exp(1)-\exp(-1) = 4 \end{array}\right. .$$

Les lignes 1 et 3 donnent :
$\exp(1) = 4$ et $\exp(-1) = 0$, ce qui contredit la ligne 2.
f ne peut donc pas être égale à la fonction exponentielle.

c. Proposition 1 fausse, car $f(0) = \exp(0) = 1$.
Proposition 2 vraie, car $f(0) = \exp(0) = 1$.
Proposition 3 fausse, car il existe trois valeurs pour lesquelles $f(x) = \exp(x)$: -1, 0 et 1.

13 $\exp(5x - 3) = 1 \Leftrightarrow 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$.

14 $\exp(5x - 3) = \exp(2x^2 + 1) \Leftrightarrow 5x - 3 = 2x^2 + 1$.
Pas de solution.

15 $\exp(x - 1)\exp(x - 2) - \exp(x - 3)\exp(x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1) + (x - 2) = (x - 3) + (x - 4)$.
Pas de solution.

16 $\exp(n - 5) = \dfrac{1}{\exp(n-7)}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \exp(n - 5)\exp(n - 7) = \exp(0)$
(1) $\Leftrightarrow 2n - 12 = 0 \Leftrightarrow n = 6$.

17 $$\left\{\begin{array}{c} x+y=1 \\ \exp(x^2)-\exp(y^2)=0 \end{array}\right. \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=1-x \\ \exp\left(x^2\right)=\exp\left((1-x)^2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=1-x \\ 0=1-2x \end{array}\right. .$$

$S = \{(0,5 ; 0,5)\}$.

18 $1 \leqslant \exp(7 - 2x) \Leftrightarrow 0 \leqslant 7 - 2x$.
$S =]-\infty ; 3,5]$.

19 $\exp(x^2 - 4) > \exp(x - 2)\exp(x - 2)$ (1)
(1) $\Leftrightarrow x^2 - 4 > (x - 2) + (x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0$.
$S =]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$.

20 $$\left\{\begin{array}{c} \exp(x-2)<\exp(2x) \\ 2x<\exp(1) \end{array}\right. \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-2<2x \\ x<\dfrac{1}{2}\exp(1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x>-2 \\ x<\dfrac{1}{2}\exp(1) \end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions est $]-2 ; 0,5\exp(1)[$.

21 $A = \exp(34)$; $B = \exp(-1)$; $C = \exp(40)$.

22 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

23 $A = \exp(3a)$; $B = 1$; $C = \exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$.

24 $A = e^{16}$; $B = e$; $C = 1$.

25 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

26 Proposition P_n : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} e^i = e^{\sum_{i=1}^{n} i}$.

Par récurrence
P_1 est vraie : $e^1 = e^1$.
Si P_n est vraie pour n donné, alors :

$$\prod_{i=1}^{n+1} e^i = \prod_{i=1}^{n} e^i e^{n+1} = e^{\sum_{i=1}^{n} i} e^{n+1} = e^{\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)+(n+1)} = e^{\sum_{i=1}^{n+1} i}.$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Donc P_n est vraie pour tout entier naturel n.

27 **a.** $e^{5x-3} = e^{4x}e^{-2x+1} \Leftrightarrow 5x - 3 = 4x + (-2x + 1)$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$$

b. $e^{x^2-5x} = e \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \text{ ou } x = \frac{5-\sqrt{29}}{2}.$$

28 **a.** $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

b. $(e^{5x} - 1)(e^x - 2\,e^{\frac{x}{2}} + 1) = 0 \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow (e^{5x} - 1)\left(\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{x}{2}} + 1\right) = 0$

$(1) \Leftrightarrow (e^{5x} - 1)\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = 0$

$(1) \Leftrightarrow e^{5x} = 1$ ou $e^{\frac{x}{2}} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

29 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

30 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

31 **a.** $e^{1-\frac{x}{5}} > 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{5} > 0 \Leftrightarrow x < 5.$

b. $e^{\frac{x+2}{x^2+2}} \geqslant e \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^2+2} \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2 - x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0\,;1].$

32 Pour $x \neq \frac{7}{2}$:

$e^{\frac{2-x}{7-2x}} - \frac{e^{2-x}\,e^5}{e^{7-2x}\,e^x} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2-x}{7-2x}} \geqslant e^{(7-x)-(7-x)}$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{2-x}{7-2x}} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2-x}{7-2x} \geqslant 0.$$

L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;2] \cup \left]\frac{7}{2}\,;+\infty\right[$.

33 $\frac{\left(e^x - 1\right)^2}{e^x} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^x} = e^x - 2 + e^{-x}.$

34 En posant $X = e^x$ ou $X = e^{-x}$, on vérifie en résolvant $X^2 + X + 1 = 0$ que les dénominateurs ne s'annulent pas.

$\frac{e^x - x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} = e^{-x}\frac{1 - xe^{-x} + e^{-x}}{1 + e^{-x} + e^{-2x}} \; (1)$

$(1) \Leftrightarrow \frac{e^x - x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} = \frac{e^{-x} - xe^{-2x} + e^{-2x}}{1 + e^{-x} + e^{-2x}}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{e^x - x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} = \frac{e^{2x}\left(e^{-x} - xe^{-2x} + e^{-2x}\right)}{e^{2x}\left(1 + e^{-x} + e^{-2x}\right)}$

$(1) \Leftrightarrow \frac{e^x - x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} = \frac{e^x - x + 1}{e^{2x} + e^x + 1}.$

L'égalité est vraie pour tout réel x.

35 **a.** $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + e^x} = \frac{\left(e^x\right)^2 - 1}{e^x\left(e^x + 1\right)} = \frac{\left(e^x - 1\right)\left(e^x + 1\right)}{e^x\left(e^x + 1\right)}$

$$= \frac{\left(e^x - 1\right)}{e^x} = e^{-x}(e^x - 1)$$

$$= 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x}.$$

REMARQUE Les dénominateurs ne s'annulent pas.

b. La factorisation permet de résoudre $f(x) = 0$.

Le développement permet de déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

36 **a.** On pose $A = \frac{\left(2e^x + \sqrt{5} + 1\right)\left(2e^x - \sqrt{5} + 1\right)}{4\left(e^{2x} + 1\right)}$

$A = \frac{4e^xe^x + 4e^x + 1 - 5}{4\left(e^{2x} + 1\right)} = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^{2x} + 1}.$

$\frac{e^x - 2 + e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^{2x} + 1}.$

REMARQUE Le dénominateur ne s'annule pas.

b. La factorisation permet de déterminer le signe de $f(x)$.

Le développement permet de déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et de montrer que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

(Il faudra encore écrire :

$\frac{e^x}{\left(e^x\right)^2 + 1} - \frac{2}{\left(e^x\right)^2 + 1} + 1 = \frac{1}{e^x + e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} + 1} + 1).$

37 $f'(x) = -2e^{-2x}$; $g'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}$.

38 $f'(x) = (3x + 6)e^{3x}$; $g'(x) = \left(-\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$.

39 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

40 **a.** Comme f est dérivable et $f'(x) = f(x)$, on sait que f' est dérivable.

En dérivant $f'(x) = f(x)$, on obtient :

$f''(x) = f'(x) = f(x)$. cqfd

b. Avec g telle que $g(x) = e^{-x}$, on a g' dérivable et $g''(x) = g(x)$. Mais, pour tout x, $g'(x) \neq g(x)$.

41 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 3x = +\infty.$

b. Il suffit de distribuer $e^x\left(1 - 3\frac{x}{e^x}\right)$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - e^{3x} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

42 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$ car $h(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1+2e^{-x}}$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = 1$

car $i(x) = \dfrac{1-\dfrac{2x}{e^{2x}}}{1+4e^{-x}+4e^{-2x}}$.

43 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

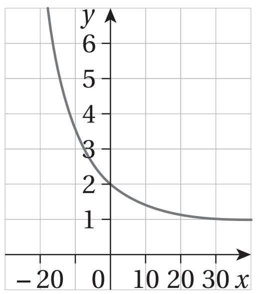
44 **a.** $\mathscr{C}_3$. **b.** $\mathscr{C}_1$. **c.** $\mathscr{C}_4$. **d.** $\mathscr{C}_2$.

45 **a.** $\mathscr{C}_4$. **b.** $\mathscr{C}_2$. **c.** $\mathscr{C}_1$. **d.** $\mathscr{C}_3$.

46 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

b. $f'(x) = -\dfrac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}$. Donc $f'(x) < 0$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c.

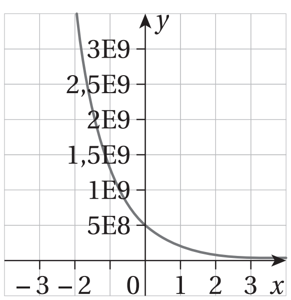


47 **1. a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. $f'(x) = -e^{-x+20}$. Donc $f'(x) < 0$ et f est décroissante.

2. $f(x) = e^{20}e^{-x}$; $e^{20} \approx 485 \times 10^6$.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x+20}\right) \qquad -e^{20-x}$$



48 **1. a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $f(x) = -6\dfrac{-\frac{x}{3}}{e^{-\frac{x}{3}}} - 5e^{\frac{x}{3}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

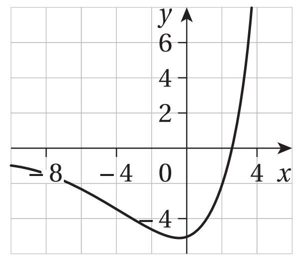
b. $f'(x) = \dfrac{2x+1}{3}e^{\frac{x}{3}}$; $f'(x)$ est du signe de $2x+1$.

f est décroissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ et f est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	0	↘	$-6\,e^{-\frac{1}{6}}$	↗	$+\infty$

2.

$$\frac{d}{dx}\left((2\cdot x-5)\cdot e^{\frac{x}{3}}\right) \qquad \left(\frac{2\cdot x}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot e^{\frac{x}{3}}$$



49 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

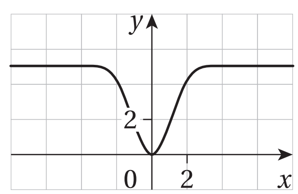
50 **1. a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

b. $f'(x) = 5x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$; $f'(x)$ est du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
f	5	↘	0	↗	5

2.

$$\frac{d}{dx}\left(5-5\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\right) \qquad 5\cdot x\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

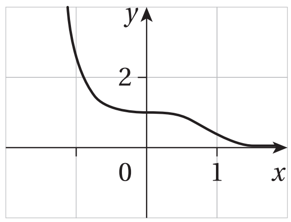


51 **1. a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. $f'(x) = -3x^2\,e^{-x^3}$; $f'(x) \leqslant 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0
f	$+\infty$	↘	1	↘	0

2. $\frac{d}{dx}\left(e^{-x^3}\right) \qquad -3\cdot x^2\cdot e^{-x^3}$

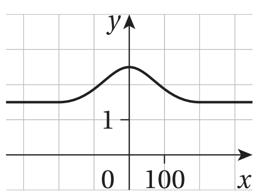


52 **1. a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

b. $f'(x) = -\dfrac{x}{500}e^{-\left(\frac{x}{100}\right)^2}$; $f'(x)$ est du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\sqrt{2}$	↗	$1+\sqrt{2}$	↘	$\sqrt{2}$

2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}+e^{-\left(\frac{x}{100}\right)^2}\right) \qquad \dfrac{-x\cdot e^{\frac{-x^2}{10000}}}{5000}$



53 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

54 **1. a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1}$

car $f(x) = e^{\frac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{2}{x}}}$.

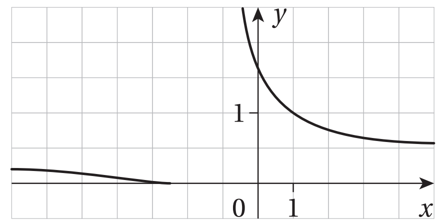
$\lim\limits_{x\to-2, x<-2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-2, x>-2} f(x) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to-2, x<-2} \dfrac{1-x}{x+2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2, x>-2} \dfrac{1-x}{x+2} = +\infty$.

b. $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}e^{\frac{1-x}{x+2}}$; $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$\frac{1}{e}$	↘ 0	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{e}$

2. $\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1-x}{x+2}}\right) \qquad \dfrac{-3\cdot e^{\frac{3}{x+2}-1}}{(x+2)^2}$



55 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

56 **1. a.** La limite de f en $-\infty$ n'existe pas car les valeurs de $f(x)$ prennent alternativement des valeurs positives et négatives et ne sont pas bornées (par exemple, en $x = \dfrac{\pi}{2} - n\pi$, n entier).

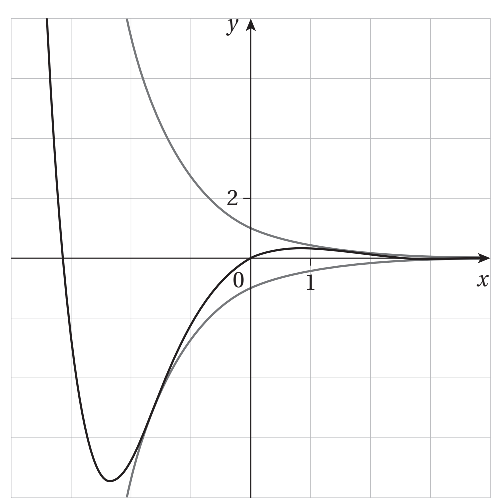
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

b. $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, n entier relatif.

x	…		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		…
$f'(x)$	…	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	…
f		↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$	↗	

2. $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\cdot\sin(x)\right) \qquad (\cos(x)-\sin(x))\cdot e^{-x}$



Exercices d'approfondissement

57 Alexia a raison car en appliquant la formule $f'(x) = (1)e^{x+1} + (-1)e^{-x-1} = e^{x+1} - e^{-x-1}$.
Benoît (son logiciel…) a raison car la fonction notée sinh est définie sur $\mathbb{R}$ par $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $2\sinh(x+1) = 2\dfrac{e^{x+1} - e^{-x-1}}{2} = e^{x+1} - e^{-x-1}$.
Caleb (son logiciel…) a raison car :

$$(e^{x+1} - 1)(e^{x+1} + 1)e^{-x-1} = (e^{2x+2} - 1)e^{-x-1} = e^{x+1} - e^{-x-1}.$$

Damien (son logiciel…) a raison car :

$$ee^x - \frac{1}{ee^x} = e^{x+1} - \frac{1}{e^{x+1}} = e^{x+1} - e^{-x-1}.$$

58 **a.** $\dfrac{x}{xe^{5x}} = e^{-5x}$. « Il existe au moins un nombre réel x tel que l'égalité soit vérifiée. »
L'égalité est vraie pour tous les réels sauf 0.
b. $e^{-x} = -e^x$. « Il existe au plus un nombre réel x tel que l'égalité soit vérifiée. »
L'égalité est toujours fausse (un côté positif, l'autre négatif). « Au plus un », ici, c'est « au maximum un ».
c. $e^{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{-x}}}$. « Cette égalité est vraie pour tout nombre réel x. » Comme les deux membres sont positifs, on peut élever au carré par équivalence pour trouver $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$ qui est toujours vrai.

59 **a.** Lorsque $x \geqslant 2$, $0 \leqslant e^{-x} \leqslant e^{-2}$. D'où pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{e^2}$. On ne pourra pas montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant 0{,}1$ car $u_2 = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}13$.
La proposition est donc fausse.
b. La réciproque de la proposition est « Si u_n est strictement inférieur à 0,1 alors n est strictement supérieur à 1. »
c. Elle est vraie car sa contraposée est vraie : « Si $n \leqslant 1$ alors $u_n > 0{,}1$. » $u_0 = 1$; $u_1 \approx 0{,}37$.

60 **a.** Comme $n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
La suite (u_n) admet donc une limite réelle qui est 1.
b. La négation de cette proposition est : « La suite n'admet pas de limite ou admet une limite infinie ».

61 **a.** $g'(x) = e^x - x$; $g''(x) = e^x - 1$, $g''(x)$ est positif pour $x \geqslant 0$.
b. g' est croissante sur $[0\,;+\infty[$; $g'(0) = 1$ donc $g'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
c. g est croissante sur $[0\,;+\infty[$; $g(0) = 1$ donc $g(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
d. $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} \leqslant e^x$. Comme $x > 0$, on obtient : $\dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{e^x}{x}$.
e. Sur $]0\,;+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{e^x}{x}$.
Par un théorème « inégalités et limites », comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

62 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

63 **a.**

$$\left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{x} \times e^{\frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n \times \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = \frac{e^x}{x^n}.$$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

64 **a.** $\dfrac{1}{e^X} = \dfrac{1}{e^{-x}} = e^x$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ car, pour n impair :

$$x^n e^x = -(-x^n)e^{-(-x)} = -\frac{(-x)^n}{e^{-x}} = -\frac{1}{\frac{e^X}{X^n}}, \text{ avec } X = -x\,;$$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^n} = +\infty$.
Pour n pair :

$$x^n e^x = (-x^n)e^{-(-x)} = \frac{(-x)^n}{e^{-x}} = \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}}, \text{ avec } X = -x\,;$$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X^n} = +\infty$.

65 **a.** $\lim\limits_{h \to 0, h \neq 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

b. $\lim\limits_{k \to 0, k \neq 0} \dfrac{e^{b+k} - e^b}{k} = e^b$. C'est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en b.
c. $k = u(a+h) - u(a)$. Comme u est continue, $\lim\limits_{h \to 0} u(a+h) - u(a) = 0$.
d. $\dfrac{e^{u(a+h)} - e^{u(a)}}{h} = \dfrac{e^{u(a+h)} - e^{u(a)}}{u(a+h) - u(a)} \times \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$ peut s'écrire pour h appartenant à $J = I \setminus \{0\}$, où I est un intervalle tel que $u(a+h) \neq u(a)$ si $h \neq 0$.

• $\lim\limits_{h \to 0, h \neq 0} \dfrac{e^{u(a+h)} - e^{u(a)}}{u(a+h) - u(a)} = e^{u(a)}$ car en écrivant $b = u(a)$;

$b + k = u(a + h)$, k tend vers 0 et $\lim\limits_{k \to 0, k \neq 0} \dfrac{e^{b+k} - e^{b}}{k} = e^{b}$.

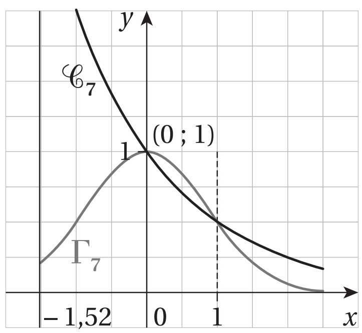
• $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0, h \neq 0} \dfrac{e^{u(a+h)} - e^{u(a)}}{h} = u'(a)\, e^{u(a)}$.

66

a. $f_k'(x) = -ke^{-kx} < 0$ car $k > 0$. f est croissante sur $\mathbb{R}$.
$g_k'(x) = -2kx\, e^{-kx^2}$. g' est du signe de x.
g est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et g est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b.



c. Les tracés de courbes pour différentes valeurs de k permettent de faire les conjectures suivantes :
- si $x = 0$ ou $x = 1$, $g_k(x) = f_k(x)$;
- si $x < 0$, $g_k(x) < f_k(x)$;
- si $0 < x < 1$, $g_k(x) > f_k(x)$;
- si $x > 1$, $g_k(x) < f_k(x)$.

L'étude de la différence $d_k(x) = g_k(x) - f_k(x)$, soit
$d_k(x) = e^{-kx^2} - e^{-kx}$ ne permet pas d'aboutir.
Le calcul direct démontre les conjectures.
- $g_k(0) = f_k(0) = 1$. $g_k(1) = f_k(1) = e^{-k}$.
- Si $x < 0$, $-kx^2 < 0 < -kx$. D'où, par croissance de la fonction exponentielle : $g_k(x) < 1 < f_k(x)$.
- $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x < 1 \Rightarrow -k < -kx < -kx^2 < 0$
  $\Rightarrow e^{-k} < f_k(x) < g_k(x) < 1$.
- $x > 1 \Rightarrow x^2 > x > 1 \Rightarrow -kx^2 < -kx < -k$
  $\Rightarrow 0 < g_k(x) < f_k(x) < e^{-k}$.

d. L'ensemble des points d'intersection est :
$\{(0\,;\,1), (1\,;\,e^{-k})$ avec $k > 0\}$.
On montre que c'est $E = A \cup]BC[$ où $A(0\,;\,1)$, $B(1\,;\,0)$ et $C(1\,;\,1)$.
- Tout point d'intersection se trouve dans cet ensemble E car, si $k > 0$, alors $0 < e^{-k} < 1$.
- Réciproquement, pour toute valeur t, avec $0 < t < 1$, il existe $k > 0$ tel que $e^{-k} = t$ (la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue strictement décroissante de $]0\,;\,+\infty[$ dans $]0\,;\,1[$).

67

1. a. La proposition semble vraie.
b. La proposition semble fausse.
c. La proposition semble vraie.
2. Si $a < 0$, il existe α tel que $\mathscr{C}$ est au-dessous de d_a pour $x < \alpha$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de d_a pour $x > \alpha$.
Si $0 \leqslant a < e$, $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de d_a.
Si $a = e$, $\mathscr{C}$ est tangente à d_a.
Si $a > e$, il existe α et β tels que $\mathscr{C}$ est au-dessous de d_a pour $\alpha < x < \beta$ et $\mathscr{C}$ au-dessus de d_a sinon.
3. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - ax$. $g'(x) = e^x - a$.
- $a < 0$: $g'(x) > 0$, g est strictement croissante ; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

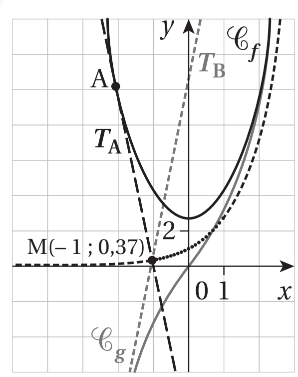
Le tableau de variations de g, continue, permet de conclure.
- $a = 0$: évident.
- $0 < a$: $e^x - a = 0$ a une unique solution c (variations de la fonction exponentielle) et $e^c = a$; la fonction g est décroissante puis croissante.
$g(c) = e^c - a\,c = e^c(1 - c)$; $1 - c = 0 \Leftrightarrow c = 1 \Leftrightarrow a = e$.
- Si $0 < a < e$, le minimum de g est strictement positif, donc $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de d_a.
- Si $a > e$, le minimum de g est strictement négatif, donc un tableau de variations de g confirme la conjecture.
- Si $a = e$, $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de d_a, mais tangente en $x = 1$.

68 **1.** $y = e^a(x - a) + e^a$.
2. a. $f_a'(x) = e^x - e^a$.
b.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		↘	0	↗	

3. D'après le tableau de variations, la courbe de la fonction exponentielle est toujours strictement au-dessus de sa tangente, sauf au point de tangence.

69 **1. a.** et **b.** Pour $a = -2$.



c. Il semble que $x_M = a + 1$.

2. Le lieu $\mathscr{L}$ semble être inclus dans la courbe de la fonction exponentielle.

Pour le vérifier, il faudrait montrer que $e^{x_M} = y_M$.

3. $f'(x) = g(x)$; $g'(x) = f(x)$.

Équation de la tangente T_A : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Équation de la tangente T_B : $y = g'(a)(x - a) + g(a)$.

L'intersection est telle que :

$$(1)\ \begin{cases} y_M = f'(a)(x_M - a) + f(a) \\ y_M = g'(a)(x_M - a) + g(a) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = f'(a)(x_M - a) + f(a) \\ x_M = a - \dfrac{g(a) - f(a)}{g'(a) - f'(a)} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = f'(a)(x_M - a) + f(a) \\ x_M = a + 1 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = e^{1+a} \\ x_M = a + 1 \end{cases} \begin{cases} y_M = e^{x_M} \\ x_M = a + 1 \end{cases}.$$

Le point M est donc sur la courbe de la fonction exponentielle.

L'ensemble des points M forme toute la courbe car lorsque a décrit $\mathbb{R}$, $x_M = a + 1$ décrit également $\mathbb{R}$.

70

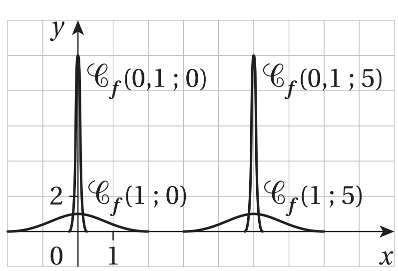
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{a,m}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_{a,m}(x) = 0$.

2. a. b. $f'_{a,m}(x) = -\dfrac{2}{a}\left(\dfrac{x-m}{a}\right)e^{-\left(\frac{x-m}{a}\right)^2}$ est du signe de $m - x$.

c.

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$f'_{a,m}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{a,m}$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{a}$	$\searrow$	0

3.



4. a. Si $a > 1$, il n'y a pas de couple solution car $f(x) < 1$.

Si $a \leqslant 1$, il y a des solutions.

Cela peut se montrer en plusieurs étapes :

- les solutions sont celles où α est nul ;
- aucune solution avec $\alpha = 1$ car la fonction $a \mapsto f_{a,0}(1)$ admet un maximum en $a = \sqrt{2}$ qui est strictement inférieur à 1 (idem si $\alpha = 1$) ;
- aucune solution avec $\alpha > 1$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (idem si $\alpha < -1$).

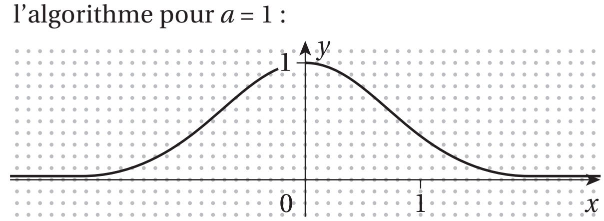
b. Recherche de l'algorithme pour les points à coordonnées entières

- Déterminer l'intervalle [–Borne ; Borne] pour la recherche (Borne est la partie entière du réel x tel que $\dfrac{1}{a}e^{-\frac{x^2}{a}} = 0{,}1$).
- Pour chaque valeur v telle que $10v$ soit un entier de [–Borne ; Borne], trouver le nombre de points qui conviennent.

Algorithme :

```
Entrée :  Entrer le nombre réel a
Initialisation :
   Affecter 0 à la variable Nombre
   Affecter 0,1 à la variable Borne
Traitement :
   Tant que (1/a) e^(-(Borne/a)^2) ⩽ 0,1 faire
         Affecter 0,1 à y
         Tant que y ⩽ (1/a) e^(-(Borne/a)^2)
            Ajouter 1 à Nombre
            Ajouter 0,1 à y
         Fin Tant que
         Ajouter 0,1 à Borne
   Fin Tant que
   Affecter Nombre*2+E(10/a) à la variable
     Nombre
   Afficher Nombre
```

Vérification graphique de la réponse donnée par l'algorithme pour $a = 1$:



71

1. $f'(x) = \left(\dfrac{2k}{100}x + \dfrac{3k+1}{20} - \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{k}{100}x^2 + \dfrac{3k+1}{20}x + 1\right)\right)e^{-\frac{x}{10}}$

$$= \left(-\frac{k}{1\,000}x^2 + \frac{k-1}{200}x + \frac{3k-1}{20}\right)e^{-\frac{x}{10}}.$$

Et $(x + 10)\left(\dfrac{-kx + 15k - 5}{1\,000}\right)e^{-\frac{x}{10}}$

$$= \left(-\frac{k}{1\,000}x^2 + \frac{k-1}{200}x + \frac{3k-1}{20}\right)e^{-\frac{x}{10}}.$$

2. a. $k = 0$: $f'(x)$ est du signe de $-x - 10$.

x	$-\infty$		-10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

b. $k = 0{,}2$: $f'(x)$ est du signe de $-(x + 10)^2$.

x	$-\infty$		-10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f		↘		↘	

3. a. $k \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;0{,}2[\cup]0{,}2\,;+\infty[$: $f'(x)$ s'annule en $x_1 = 15 - \dfrac{5}{k}$ et $x_2 = -10$.

b. Si $k > 0$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 15 - \dfrac{5}{k} < -10 \Leftrightarrow k < 0{,}2$

$\Leftrightarrow 0 < k < 0{,}2.$

Si $k < 0$: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 15 - \dfrac{5}{k} < -10 \Leftrightarrow k > 0{,}2$ impossible.

c. $k \in]-\infty\,;0[$:

x	$-\infty$		-10		$15 - \dfrac{5}{k}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

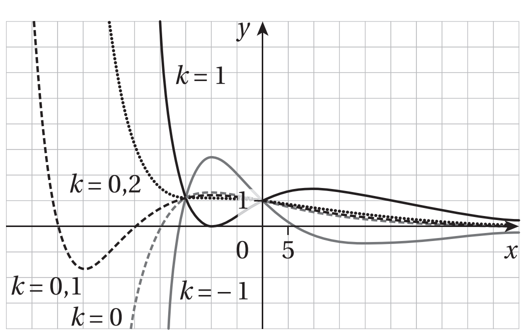
$k \in]0\,;0{,}2[$:

x	$-\infty$		$15 - \dfrac{5}{k}$		-10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

$k \in]0{,}2\,;+\infty[$:

x	$-\infty$		-10		$15 - \dfrac{5}{k}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

d.



4. $k = 1$: $x_1 = 10$; $f(-10) - f(10) = A$

$$A = \left(1 + \frac{3+1}{2} + 1\right)e^{-\frac{10}{10}} - \left(1 - \frac{3+1}{2} + 1\right)e^{-\frac{10}{10}} = 4e^{-1}.$$

72 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. a. $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = g(x)$.

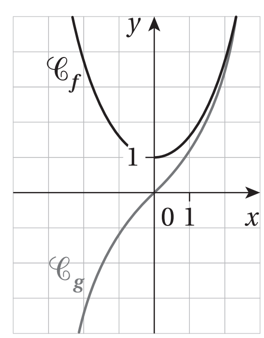
b. $g'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$.

3. a. f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$ car $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^{-x} \Leftrightarrow x \geqslant -x \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
g est croissante sur $\mathbb{R}$ car g' est positive.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

b.



4. a. $d(x) = e^{-x}$. $d(x)$ représente l'écart « algébrique » entre les ordonnées de deux points, de même abscisse x, situés respectivement sur $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b. $d(x) > 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = +\infty$. Les deux courbes se rapprochent lorsque x tend vers $+\infty$. On peut utiliser le vocabulaire « asymptotes l'une à l'autre ».

5. a. $f^2(x) - g^2(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{4} = 1.$$

$$f^2(x)+g^2(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}+\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)}{4}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=f(2x).$$

$f^2(x)+g^2(x)=f^2(x)+(f^2(x)-1)=2f^2(x)-1.$

$f^2(x)+g^2(x)=(1+g^2(x))+g^2(x)=2g^2(x)+1.$

$A=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

$$A=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)$$

$$A=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=f(x+y).$$

$B=g(x)f(y)+g(x)f(y)$

$$B=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$$

$$B=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=g(x+y).$$

b. $ch^2(x)-sh^2(x)=1$;

$ch(2x)=ch^2(x)+sh^2(x)=2sh^2(x)+1=2ch^2(x)-1$;

$ch(x+y)=ch(x)ch(y)+sh(x)sh(y)$;

$sh(x+y)=sh(x)ch(y)+ch(x)sh(y)$.

c. Les formules sont similaires, aux signes près, à celles en sinus et cosinus.

73

On note x l'abscisse de M, a l'abscisse de A et f la fonction qui donne l'aire du rectangle AMNB.

- f n'est pas définie lorsque $x=a$ car il n'y a pas de rectangle. Éventuellement, on pourrait poser $f(a)=0$.
- $f(x)$ est strictement positif car c'est une aire.

$f(x)=\text{MN}\times\text{AM}=(x-a)e^x$ lorsque $x>a$.

$f(x)=\text{MN}\times\text{AM}=(a-x)e^x$ lorsque $x<a$, ou $f(x)=|x-a|e^x$.

f est définie, dérivable sur $]-\infty\ ;a[\cup]a\ ;+\infty[$.

Si $x>a$: $f'(x)=(x-a+1)e^x$. Pour $x>a$, on a $x-a+1>0$. Dans ce cas, f est croissante.

Si $x<a$: $f'(x)=(a-x-1)e^x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=a-1$. $f(a-1)=e^{a-1}$.

$\lim\limits_{x\to a,x\neq a} f(x)=0$. f peut être prolongée par continuité en a.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ car $f(x)=ae^x+\dfrac{(-x)}{e^{-x}}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$		$a-1$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
f	0	↗		↘	0 ‖ 0	↗	$+\infty$

74

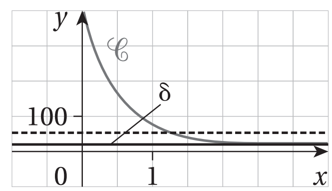
Partie A

1. θ est une fonction décroissante car : $\theta'(t)=-800e^{-2t}<0$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t)=20$.

2. a. L'asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ est la droite d'équation $y=20$.

b.



3. Comme $\theta(1{,}3)\approx 50$, la pièce est à 50 °C après 1 h 20.

Partie B

1. a. $d_0=400-400e^{-2}$; $d_1=400e^{-2}-400e^{-4}$.

b. $d_n=(400-400e^{-2})e^{-2n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=0$.

2.

```
Initialisation :
   Affecter 0 à la variable n
   Affecter f(n) – f(n+1) à d
Traitement :
   Tant que d > 0,1 faire
   |  Affecter n+1 à n
   |  Affecter f(n) – f(n+1) à d
   Fin Tant que
   Afficher n
```

Objectif BAC

Se tester sur…

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p.456.

Sujets type BAC

83 *Cet exercice est résolu dans le manuel, p. 188.*

84 *Cet exercice est résolu dans le manuel, p. 189.*

85 **a.** Faux : $f'(x)\neq 0$ pour tout x.

b. Vrai : $e^{(a+b)^2-(a-b)^2}=e^{4ab}=(e^{2ab})^2$ et e^{2ab} est positif.

c. Vrai : l'égalité est vraie pour tout x et tout y.

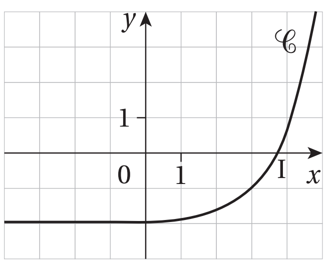
d. Vrai : on cherche une solution telle que $x = y$.
$2e^x = e^{2x} \Leftrightarrow 2e^x = e^x e^x \Leftrightarrow e^x(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$.
Cette dernière équation admet une solution α d'après la continuité et les variations de la fonction exponentielle. Donc $e^\alpha e^\alpha = e^{\alpha+\alpha}$, il suffit de trouver deux nombres dont la somme est égale au produit. C'est le cas pour 2 : x et y sont tels que $e^x = e^y = 2$.
e. Faux : par étude de la fonction $x \mapsto e^x - (x+1)$, on montre que $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.
(La courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente sauf au point de tangence en $x = 0$.)
Et $x = 0$ n'est pas solution de $e^x > e$.
f. Vrai : en écrivant $\dfrac{1-e^x}{x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{e^x}{x}$.
g. Faux : elle vaut -1, en écrivant $\dfrac{1-e^x}{x} = -\dfrac{e^x - 1}{x}$.
h. Vrai : la fonction $u : x \mapsto x$ qui est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ convient.

86

1. $f'(x) = e^{x-3} > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	-2	↗	$+\infty$

2.



3. f est continue. D'après le tableau de variations, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$, et donc un unique point d'intersection I de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
4. a. L'algorithme détermine, à partir d'une valeur x, en diminuant de $1/n$ en $1/n$, la première valeur y telle que $f(y) < 0$.
b. 3,6.
c. 3.
d. Il faudrait, par exemple, vérifier si $f(x) < 0$. Dans ce cas, il faut rechercher dans l'autre sens en ajoutant $1/n$.

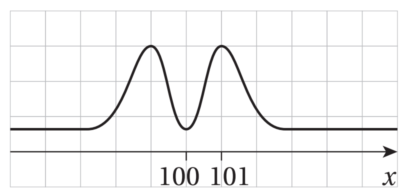
87 **a.** À 10^{-1} près : $f(0) = f(3\,600) = 0$.
b. La dérivée est du signe de :
$-(x - 100)(x^2 - 200x + 9\,999)$.
Elle s'annule en 99, 100 et 101.
Son signe est donné par le tableau :

x	$-\infty$		99		100		101		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Le signe peut être obtenu par tableau de signe mais ce qu'indique le logiciel de calcul formel est suffisant.
c.

x	$-\infty$		99		100		101		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
f	10	↗	$10 + \dfrac{100}{e}$	↘	10	↗	$10 + \dfrac{100}{e}$	↘	10

d. D'après le tableau de variations, la hauteur maximale est $f(99)$ ou $f(101)$.
Mais $f(99) = f(101) = 10 + \dfrac{100}{e}$.
Ainsi $M = 10 + \dfrac{100}{e} \approx 46{,}8$.
e. Sur [95 ; 106] en prenant comme unités 1 cm pour 1 seconde sur l'axe des abscisses et 1,5 cm pour 20 cm sur l'axe des ordonnées :



88 **Partie A**
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
2. $g'(x) = 2e^x + 2 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
g	$-\infty$	↗	$+\infty$

3. a. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires :
$g(0{,}94) \approx -0{,}000\,04 < 0$; $g(0{,}941) \approx 0{,}007 > 0$.
b. g est négative sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et g est positive sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie B
1.

x	$-\infty$		0		2,5		$+\infty$
$2x - 5$		−		−	0	+	
$1 - e^{-x}$		−	0	+		+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f'(x) = g(x)e^{-x}$ est du signe de $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. a. $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha} = -\alpha + \frac{7}{2}.$$

$f(\alpha) = \ldots = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$.

b. $h'(x) = \dfrac{8x^2-56x+90}{(2x-7)^2} = \dfrac{2(2x-9)(2x-5)}{(2x-7)^2}$ est positif sur $]-\infty$; $2{,}5]$.

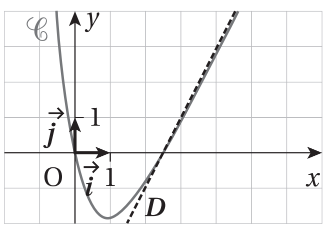
Comme $0{,}94 < \alpha < 0{,}941$, on a :

$-1{,}905 < h(0{,}94) < h(\alpha) = f(\alpha) < h(0{,}941) < -1{,}895$.

5. $f(x) - (2x-5) = -e^{-x}(2x-5)$ du signe de $-2x+5$.

Si $x \in\,]-\infty$; $2{,}5]$, alors $\mathscr{C}$ est au-dessus de D et si $x \in [2{,}5$; $+\infty[$, alors $\mathscr{C}$ est au-dessous de D.

6.



Partie C

1. $u_n = \dfrac{(2n-5)-f(n)}{2n-5} = e^{-n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.

2. a. (u_n) est une suite géométrique de raison e^{-1} qui converge vers 0 car $-1 < e^{-1} < 1$.

b. Oui, ce résultat pouvait être prévu car le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers $+\infty$.

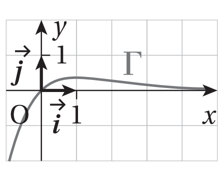
89 Partie A

1. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

c.



2. a. $f(0) = 0$; $f(1) = e^{-1}$.

D'après le tableau de variations sur $[0$; $1]$ puis sur $[1$; $+\infty[$, on en déduit les deux solutions de l'équation $f(x) = m$ lorsque m est dans $]0$; $e^{-1}[$.

b. $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$.

c. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f(x) = e^{-1} \Leftrightarrow x = 1$.

Partie B

1. a. Initialisation $\alpha > 0$.

Hérédité : $u_n > 0 \Rightarrow u_n\, e^{-u_n} > 0$.

b. Comme $u_n > 0$, $e^{-u_n} < 1$.

Donc $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) < 0$ et (u_n) est décroissante.

c. (u_n) est décroissante minorée par 0, donc elle converge vers $l = f(l)$. D'où $l = 0$.

2. Oui pour $v_0 = \beta$.

90 Partie A

1. $g'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. $g(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

3. $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow e^x > x$.

Partie B

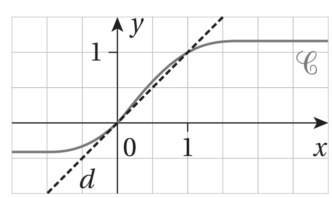
1. $f(0) = 0$; $f(1) = 1$. f est croissante, donc si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. a. $\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x} = \dfrac{(1-x)\left(e^x - x - 1\right)}{e^x - x}$

$$= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - \frac{x\left(e^x - x\right)}{e^x - x} = f(x) - x.$$

b. $f(x) - x > 0$, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de d sur $[0$; $1]$.

3.



Partie C

1. Par récurrence

Initialisation : $u_1 \approx 0{,}56$. Donc $0{,}5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

Hérédité

f est croissante, donc si $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ alors $0{,}5 < f(0{,}5) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(1) = 1$.

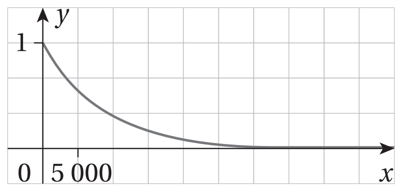
2. (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

La limite de (u_n) est 1 (ne peut pas être 0 car $u_n \geqslant 0{,}5$).

Problèmes

91 **a.**



b. $22\,000 \leqslant t \leqslant 29\,000 \Leftrightarrow 0{,}03 \leqslant e^{-0{,}000\,121t} \leqslant 0{,}07$.

Car $e^{-29\,000 \times 0{,}000\,121} \approx 0{,}03$ et $e^{-22\,000 \times 0{,}000\,121} \approx 0{,}07$.

c. On cherche T tel que $0 \leqslant t \leqslant T$, alors $0{,}015 \leqslant e^{-0{,}000\,121t} \leqslant 1$.

Par encadrement à la calculatrice (f est strictement décroissante), on trouve $T = 34\,700$ ans.

92 **1.** 1 jour = 86 400 s.

$M(0)e^{-86\,400\lambda} = (1 - 0{,}083)M(0) \Leftrightarrow e^{-86\,400\lambda} = 0{,}917$.

2. a. $f\,'(x) = -86\,400e^{-86\,400x} < 0$. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

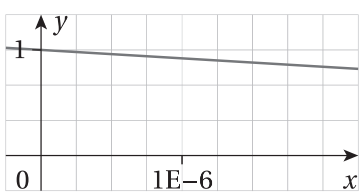
b. f est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Donc $f(x) = 0{,}917$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.

c. $0{,}000\,001\,0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}000\,001\,1$.

d.



3. $e^{-8 \times 86\,400\lambda} \approx e^{-8 \times 86\,400 \times 0{,}000\,001} \approx 0{,}500\,9$.

Ce qui montre que la demi-vie de l'iode 131 est d'environ 8 jours.

93 **1. a.** $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $-e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}} \leqslant f(x) \leqslant e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$.

Par le théorème d'encadrement des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$.

b. Voir la figure plus loin.

c. Sur $[0\,;2\pi]$: $I_1(x\,;y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}_1 \Leftrightarrow I_1\left(\dfrac{3\pi}{2}\,;e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}\right)$ car $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$.

d. Sur $[0\,;2\pi]$: $I_2(x\,;y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}_2 \Leftrightarrow I_2\left(\dfrac{\pi}{2}\,;e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}\right)$ car $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$.

2. a. $f\,'(x) = (\cos x)\,e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\sin x)\,e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$

$$= \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\right)e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}.$$

b. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$= \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\right)e^{-\frac{x}{\sqrt{3}}}$$

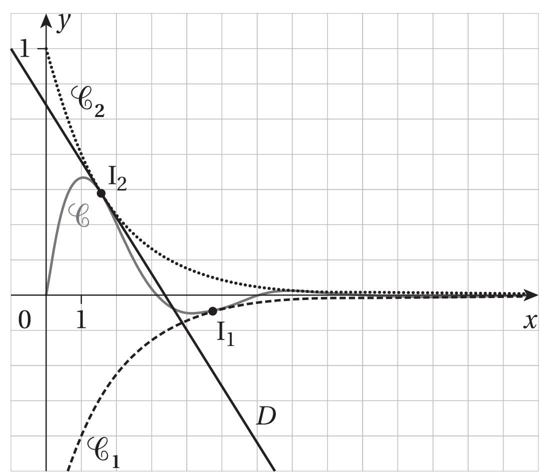
c. Sur $[0\,;2\pi]$:

$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} \leqslant x + \dfrac{\pi}{6} \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{4\pi}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$	$\nearrow$	0

3. a. $f\,'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \approx -0{,}23$.

b.



94 **1. a.** Une volaille ne vit pas indéfiniment !

b. $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0) = M_0$. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = M_0\,e^{\frac{a}{b}}$.

c. $\dfrac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)' = ae^{-bt}$. $f\,'(x) = aM_0e^{-bt}\,e^{\frac{a}{b}\left(1-e^{-bt}\right)} > 0$.

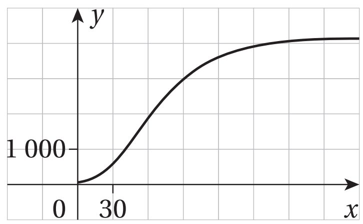
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	M_0	$\nearrow$	$M_0\,e^{\frac{a}{b}}$

d. $f''(t) = a\mathrm{M}_0\left(-b\mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-bt}\right)} + a\mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-bt}\right)}\right)$

$$= a\mathrm{M}_0(-b + a\mathrm{e}^{-bt})\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-bt}\right)}$$

$$= -a\mathrm{M}_0(b - a\mathrm{e}^{-bt})\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\left(1-\mathrm{e}^{-bt}\right)}.$$

2. a.



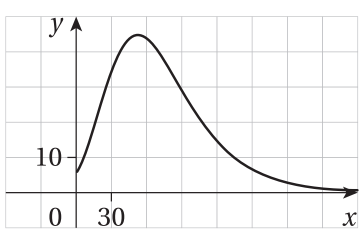
b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{M}_0\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}}$, on peut dire que pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe A tel que si $t > A$, alors : $\left|f(t) - \mathrm{M}_0\mathrm{e}^{\frac{a}{b}}\right| < \varepsilon$.

En prenant $\varepsilon = 100$, on a bien : il existe A tel que si $t > A$, alors $\left|f(t) - M_0\mathrm{e}^{\frac{a}{b}}\right| < 100$.

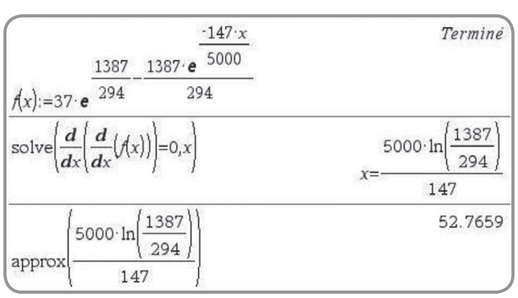
Ici $f(t) - \mathrm{M}_0\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}} = \mathrm{M}_0\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-bt}} - 1\right) < 0$, car $-\mathrm{e}^{-bt} < 0$.

On cherche donc A tel que, pour $t > A$,
$f(t) > \mathrm{M}_0\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}} - 100$. Or $\mathrm{M}_0\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}} \approx 4\,140{,}64$.
On cherche A tel que, pour $t > A$, $f(t) > 4\,140{,}637$.
Ce qui donne, graphiquement à la calculatrice : $A \approx 180$.
Comme $f(178) < \mathrm{M}_0\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}} - 100 < f(179)$, $A = 179$ convient.
Cela signifie qu'au bout de 179 jours, le poulet label mâle est à 100 g de son poids maximal.

c.



d. Graphiquement, la valeur de t qui rend cette vitesse maximale est 52,8.



95 **1. a.** T vérifie $\frac{\mathrm{C}_0}{2} = \mathrm{C}_0\mathrm{e}^{-\ell T} \Leftrightarrow \mathrm{C}_0\mathrm{e}^{-\ell T} = 0{,}5$.

b. $\frac{\mathrm{C}_0\mathrm{e}^{-7\ell T}}{\mathrm{C}_0} = \mathrm{e}^{-7\ell T} = (\mathrm{e}^{-\ell T})^7 = 0{,}5^7 \approx 0{,}008 < 0{,}01$.

Donc après 7 demi-vies, plus de 99 % du médicament ont été éliminés. L'étudiant a raison.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} D(t) = 0$.

b. $D'(t) = 8\left(-\frac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} + \frac{\mathrm{e}}{100}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}t}{100}}\right)$

$$= -\frac{8}{100}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}t}{100}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{100}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}t}{100}} - \mathrm{e}\right)\right)$$

$$= -\frac{2}{25}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}t}{100}}\left(\mathrm{e}^{\frac{(\mathrm{e}-1)t}{100}} - \mathrm{e}\right)\right).$$

c. Pour $t \geqslant 0$: $D'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{(\mathrm{e}-1)t}{100}} - \mathrm{e} \leqslant 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(\mathrm{e}-1)t}{100} \leqslant 1 \Leftrightarrow t \leqslant \frac{100}{\mathrm{e}-1}.$$

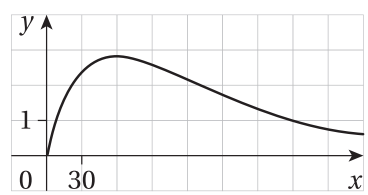
Donc $D'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[0\,;\,\frac{100}{\mathrm{e}-1}\right]$.

d. D est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{100}{\mathrm{e}-1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{100}{\mathrm{e}-1}\,;\,+\infty\right[$.

e. $D_{\max} = D\left(\frac{100}{\mathrm{e}-1}\right)$

$$= 8\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}-1}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}\right) \approx 2{,}826\ \mathrm{mg{\cdot}L^{-1}}.$$

f.



g. On cherche le temps t tel qu'il reste 10 % de la concentration maximale.
C'est au-delà de 334 min, car $D(334) \approx 0{,}282\,6$.

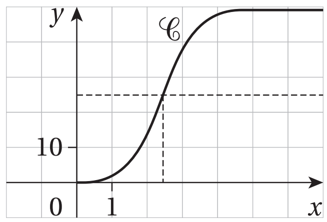
96 **1. a.** $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = b$.

b. La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = b$ comme asymptote.

c. $A'(t) = \dfrac{ab^2e(b-e)\mathrm{e}^{-abt}}{\left((b-e)\mathrm{e}^{-abt}+e\right)^2} > 0$. A est croissante.

x	0	$+\infty$
$A'(x)$	$+$	
A	e ↗	b

2. a.



b. Après 2,4 jours (2,45 par encadrement).

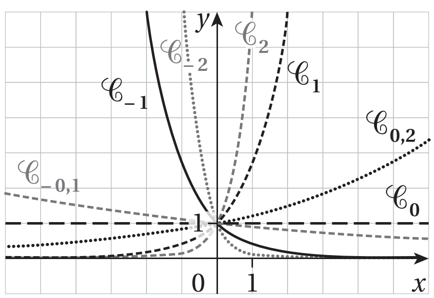
97 **1. a.** Si $k > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$.

Si $k < 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$.

b. $f_k'(x) = k\mathrm{e}^{kx}$. f' est du signe de k.

Si $k < 0$, f est strictement décroissante ; si $k = 0$, f est constante ; si $k > 0$, f est strictement croissante.

c.



2. a. La courbe $\mathscr{C}_k$ passe par le point de coordonnées $(1 ; -3)$ si et seulement si $\mathrm{e}^k = -3$. Ce qui est impossible.

b. La courbe $\mathscr{C}_k$ passe par le point de coordonnées $(1 ; 1)$ pour $k = 0$.

La courbe $\mathscr{C}_k$ passe par le point de coordonnées $(1 ; \mathrm{e})$ pour $k = 1$.

c. $y_0 > 0$, $\mathrm{M}(x_0 ; y_0) \in \mathscr{C}_k \Leftrightarrow \mathrm{e}^{kx_0} = y_0$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{tx_0}$ est strictement croissante, $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$. Donc par théorème, comme $y_0 > 0$, il existe un unique réel k tel que $\varphi(t) = y_0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{kx_0} = y_0$.

d. $\mathrm{e}^k = \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow k = -2$. Voir le tracé de $\mathscr{C}_{-2}$ ci-dessus.

3. a. La dérivée de f ne s'annule pas, donc aucune tangente n'est parallèle à l'axe des abscisses.

Aucune tangente ne peut être parallèle à l'axe des ordonnées car f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Δ est tangente à une des courbes $\mathscr{C}_k \Leftrightarrow$ il existe deux réels x_0 et k tels que :

- le point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$ se trouve sur la courbe $\mathscr{C}_k$;
- le coefficient directeur de la tangente en $(x_0 ; f(x_0))$ à la courbe $\mathscr{C}_k$ est $f'(x_0)$.

D'où :

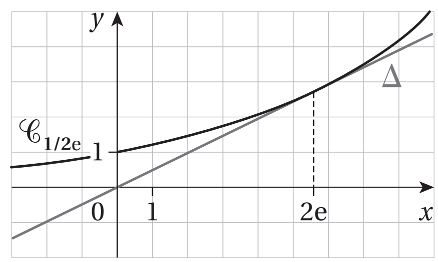
$$\begin{cases} f_k'(x_0) = a \\ f(x_0) = ax_0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = k\mathrm{e}^{kx_0} \\ \mathrm{e}^{kx_0} = ax_0 + b \end{cases}.$$

Si $b = 0$: a est non nul car Δ n'est pas parallèle à un axe.

$$(1)\begin{cases} a = k\mathrm{e}^{kx_0} \\ \mathrm{e}^{kx_0} = ax_0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = k\mathrm{e}^{kx_0} \\ \mathrm{e}^{kx_0} = ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = kax_0 \\ \mathrm{e}^{kx_0} = ax_0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} kx_0 = 1 \\ \mathrm{e}^{kx_0} = ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx_0 = 1 \\ \mathrm{e} = ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{a}{\mathrm{e}} \\ x_0 = \dfrac{\mathrm{e}}{a} \end{cases}.$$

Lorsque $a = 0,5$: $k = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$; $\Delta : y = 0,5x$ est tangente en $x_0 = 2\mathrm{e}$ à $\mathscr{C}_k$.



4. a. $\begin{cases} a = k\mathrm{e}^{kx_0} \\ \mathrm{e}^{kx_0} = ax_0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\mathrm{e}^2 = k\mathrm{e}^{kx_0} \\ \mathrm{e}^{kx_0} = -3\mathrm{e}^2 x_0 - \mathrm{e}^2 \end{cases}$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3\mathrm{e}^2 = k\left(-3\mathrm{e}^2 x_0 - \mathrm{e}^2\right) \\ \mathrm{e}^{kx_0} = -3\mathrm{e}^2 x_0 - \mathrm{e}^2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3-k}{3k} \\ \mathrm{e}^{\frac{3-k}{3}} = -3\mathrm{e}^2 \dfrac{3-k}{3k} - \mathrm{e}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3-k}{3k} \\ \mathrm{e}^{\frac{3-k}{3}} = -\dfrac{3}{k}\mathrm{e}^2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3-k}{3k} \\ k\mathrm{e}^{1-\frac{k}{3}} = -3\mathrm{e}^2 \end{cases}.$$

b. $g'(x) = \mathrm{e}^{1-\frac{x}{3}}\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)$; $g(3) = 3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$;

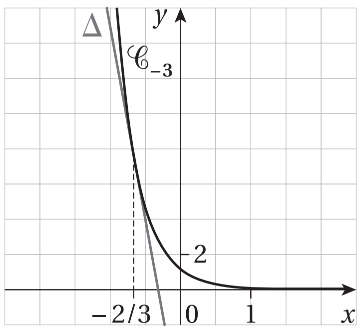
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, car $g(x) = 3\mathrm{e}\dfrac{\frac{x}{3}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}}$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	3	↘	0

c. $g(-3) = -3\mathrm{e}^2$.

d. D'après le tableau de variations, tout nombre strictement négatif a un antécédent et un seul par g.

Comme $g(-3) = -3e^2$, il n'existe que la courbe $\mathscr{C}_k$ avec $k = -3$ qui admet la droite Δ comme tangente en $x_0 = \dfrac{3-k}{3k} = -\dfrac{2}{3}$.



98 **1. a.** Augmentée de moitié : × 1,5. Après un an : × 1,5², soit × 2,25.

b. Le coefficient :

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \frac{23\,298\,085\,122\,481}{8\,916\,100\,448\,256} \approx 2{,}61.$$

c. Après une année, S devient $S\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

2. a. $g'(x) = e^x - 1$.

g est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$, ayant comme minimum $g(0) = 0$.

Donc pour tout x réel, $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 + x \leqslant e^x$. (*)

Dans (*), en remplaçant x par $-x$, on a :

$1 - x \leqslant e^{-x}$. (**)

Par (**), pour $1 - x > 0$, on obtient : $e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

b. Pour n entier naturel non nul, $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Donc si $0 \leqslant A \leqslant B$, alors $0 \leqslant A^n \leqslant B^n$.

c. Comme $0 \leqslant 1 + x \leqslant e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$, on a :

$$0 \leqslant (1+x)^n \leqslant (e^x)^n \leqslant \left(\frac{1}{1-x}\right)^n, \text{ avec } n \text{ entier, } n > 0.$$

En posant $x = \dfrac{1}{n}$:

$$0 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \Leftrightarrow 0 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

Avec $x = \dfrac{1}{n+1}$, comme $\dfrac{1}{n+1} < 1$:

$$\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \Leftrightarrow e \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

On en déduit que pour n entier, $n > 0$:

$$0 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

d. D'après **c** :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - u_n \leqslant e - u_n \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - u_n \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 0 \leqslant e - u_n \leqslant u_n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow 0 \leqslant e - u_n \leqslant \frac{u_n}{n}.$$

Pour $n = 1$, l'inégalité $e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ donne

$u_n \leqslant e \leqslant 4$. Donc $0 \leqslant e - u_n \leqslant \dfrac{4}{n}$.

e. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, le théorème des encadrements permet de dire que la suite $(e - u_n)$ admet une limite qui vaut 0, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e$.

3. a. $u_1 = 2$; $u_2 = 2{,}25$; $u_3 = \dfrac{64}{27} \approx 2{,}37$.

b. La question **2d** permet de dire que u_n est toujours inférieur à e et que si $\dfrac{2}{n} < 10^{-2}$, u_n est une valeur approchée à 10^{-2} de e. C'est le cas pour $n > 200$.

99 **1. a.**
$$k_p'(x) = \frac{pe^{px} - pe^{-px}}{2} = \frac{-p\left(-e^{px} + e^{-px}\right)}{2} = -ph_p'(x).$$

b. Comme $h_p'(x) = -\dfrac{1}{p}k_p'(x)$, on en déduit que $h_p(x) = -\dfrac{1}{p}k_p(x) + C$ avec C constante.

Comme $h_p(0) = 20$ et $k_p(0) = 1$, on a :

$$20 = -\frac{1}{p} + C \Leftrightarrow C = 20 + \frac{1}{p}.$$

D'où
$$h_p(x) = -\frac{1}{p}\,\frac{e^{px} + e^{-px}}{2} + 20 + \frac{1}{p} = \frac{2 - e^{px} - e^{-px}}{2p} + 20.$$

2. a. $h_p(70) = \dfrac{2 - e^{70p} - e^{-70p}}{2p} + 20$.

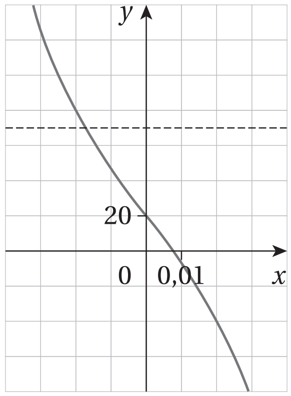
b. $h_p(70) = f(p)$ par définition.

c. En développant, on a :

$$35\left(\frac{e^{-70p} - 1}{-70p} - \frac{e^{70p} - 1}{70p}\right) + 20 = \frac{2 - e^{70p} - e^{-70p}}{2p} + 20.$$

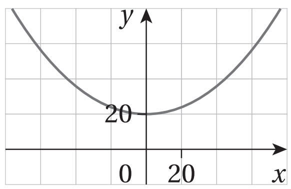
Comme $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 0$, $\displaystyle\lim_{p\to 0} f(p) = 20$.

d.



e. $p_0 = -0{,}018$.

3.



4. La hauteur minimale est $h_{p_0}(40) \approx 35$ cm.

100

1. a. Dans le triangle rectangle APH, les côtés mesurent 96 m, 200 m et $8\sqrt{769}$ m.

$\sin\widehat{\text{APH}} = \dfrac{12}{\sqrt{769}}$. Donc $\widehat{\text{APH}} \approx 25{,}64°$ et $\widehat{\text{APG}} \approx 51{,}28°$.

Dans le triangle rectangle OPH, les côtés mesurent 192 m, 200 m et $8\sqrt{1\,201}$ m.

$\sin\widehat{\text{APH}} = \dfrac{24}{\sqrt{1\,201}}$. Donc $\widehat{\text{OPH}} \approx 43{,}83°$.

La dimension apparente la plus petite correspond à l'angle le plus petit, donc la hauteur de l'arche devrait être plus petite que la largeur de l'arche.

b. En fait sur la photo c'est le contraire, ce qui signifie sans doute que le photographe n'était pas en face de l'arche ou que la photo a été redimensionnée.

2. a. $\begin{cases} f(-7) = -9 \\ f(0) = 0 \\ f(7) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49a - 7b + c = -9 \\ c = 0 \\ 49a + 7b + c = -9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{49} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$

b. $f(9) = -\dfrac{729}{49} \approx -14{,}9$. Comme $f(9) \neq -19$, l'arche n'a pas la forme d'une parabole.

3. a. $g(0) = 0 \Leftrightarrow a + c = 0 \Leftrightarrow c = -a$.

b. $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(7) = -9 \\ g(9) = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ a\dfrac{e^{-7b} + e^{7b}}{2} + c = -9 \\ a\dfrac{e^{-9b} + e^{9b}}{2} + c = -19 \end{cases}.$

c. $g(x) = -2{,}432\,54\,\dfrac{e^{-0{,}318\,31x} + e^{0{,}318\,31x}}{2} + 2{,}432\,54.$

d. L'architecte a raison, car $g(0) = 0$, $g(5{,}2) \approx -4$, $g(7) \approx -9$, $g(8{,}2) \approx 14{,}2$ et $g(9) \approx -19$.

101

1. a. f est du signe de $-x$. Si $x > 0$, alors $f(x) < 0$.
Si $x = 0$, alors $f(x) = 0$. Si $x < 0$, alors $f(x) > 0$.

b. $f'(x) = (-2x - 1)e^{2x+1}$. Sur $[-0{,}5\,;+\infty[$, f est décroissante et sur $]-\infty\,;-0{,}5]$, f est croissante.

c. $\dfrac{e}{2} \times \dfrac{-2x}{e^{-2x}} = -x\dfrac{e}{e^{-2x}} = -xe^{2x+1} = f(x)$

et $\lim\limits_{X\to-\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

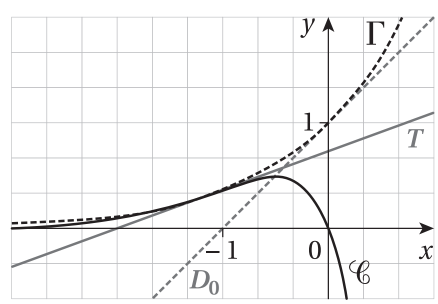
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

d.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	$-\infty$

e. $f(0) = f'(0)$. Donc la tangente en O est l'axe des abscisses.

f. $T : y = e^{-1}(x + 1) + e^{-1} \Leftrightarrow y = e^{-1} + e^{-1}x + e^{-1}$.



2. a. La tangente à Γ au point d'abscisse −1 est T.

b. Voir la figure ci-dessus.

c. $f(x) - e^x = -x\,e\,e^{2x} - e^x = -e^x(x\,e\,e^x + 1)$.
$h(x) = 1 + x\,e\,e^x$. $h'(x) = e(x + 1)e^x$.
Pour $x < -1$, h est croissante. Pour $x > -1$, h est décroissante. $h(-1) = 0$. Donc $h(x) < 0$ pour $x \neq -1$.
$\mathscr{C}$ se situe toujours sous Γ, sauf au point d'abscisse −1 où elles sont confondues.

3. a. $D_m : y = e^m(x - m) + e^m$.

b. $D_0 : y = x + 1$ (voir la figure précédente).

c. $A_m(0\,;(-m+1)e^m)$; $B_m(m-1\,;0)$;

$J_m\left(\frac{m-1}{2}\,;\frac{1-m}{2}e^m\right)$.

$f\left(\frac{m-1}{2}\right) = -\frac{m-1}{2}e^{2\frac{m-1}{2}+1} = \frac{1-m}{2}e^m$.

Donc J_m appartient à $\mathscr{C}$.

d. Comme $\frac{m-1}{2}$ décrit $\mathbb{R}$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points J_m lorsque M décrit Γ est $\mathscr{C}$.

102 **Partie A**

a. En supposant que les graduations sur les axes sont les entiers, on peut conjecturer que f est croissante sur $[-3\,;2]$.

b. On peut conjecturer que f est négative sur $]-\infty\,;0]$ et positive sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B

1. $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = xg(x)$.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$, car :

$g(x) = -\frac{1}{e}\frac{-x}{e^{-x}} + 2e^{x-1} - 1$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0$.

b. $g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = (x+3)e^{x-1}$.

$g'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;-3]$ et $g'(x) > 0$ sur $[-3\,;+\infty[$.

c.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	0	↘	$-1-\frac{1}{e^4}$	↗	$+\infty$

d. D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires : g ne s'annule pas sur $]-\infty\,;-3]$ et g s'annule en une unique valeur α sur $[-3\,;+\infty[$.

Comme $g(0{,}20) < 0$ et $g(0{,}21) > 0$, on déduit que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.

e. $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\alpha]$ et $g(x) > 0$ sur $[\alpha\,;+\infty[$.

3. a. et **b.**

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

c. La première conjecture était fausse.

Partie C

1. Comme $g'(\alpha) = 0$ et $\alpha \neq -2$, on a :

$(\alpha+2)e^{\alpha-1} = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$.

Donc $f(\alpha) = \alpha^2\left(\frac{1}{\alpha+2}\right) - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\alpha^2 - \alpha\left(\alpha^2+2\right)}{2(\alpha+2)}$

$= \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2. a. $h'(x) = \frac{-6x^2(x+2)+2x^3}{4(x+2)^2} = \frac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$.

Sur $[0\,;1]$, $h'(x) < 0$. Donc h est décroissante.

b. Comme $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$, on a :

$h(0{,}21) < h(\alpha) < h(0{,}20)$.

Or $f(\alpha) = h(\alpha)$, donc :

$-0{,}002\,095 \approx -\frac{9\,261}{4\,420\,000} < f(\alpha)$

$< -\frac{1}{550} \approx -0{,}001\,818$.

3. a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}(e^{x-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

D'après le tableau de variations de f :

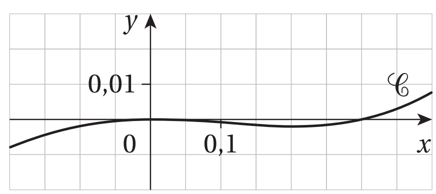
$f(x) < 0$ pour $x \in\,]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de l'axe des abscisses ;

$f(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = 1$;

$f(x) > 0$ pour $x \in\,]0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

b. La deuxième conjecture était fausse.

Partie D



103

1. a. $f(0) = \frac{1}{\sqrt{t_0}}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. $f'(x) = -\frac{x}{t_0\sqrt{t_0}}e^{-\frac{x^2}{2t_0}}$, f' est donc du signe opposé de x.

d.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{t_0}}$	↘	0

e. f admet un maximum en $x = 0$, c'est-à-dire lorsque M est en O.

f. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. a. $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x_0^2}{2t}} = 1$.

b. En posant $t = \dfrac{x_0^2}{2X}$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x_0^2}{2t}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{2X}}}\mathrm{e}^{-\frac{x_0^2}{2\frac{x_0^2}{2X}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{X}}{|x_0|}\mathrm{e}^{-X}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{|x_0|}\frac{\sqrt{X}}{\mathrm{e}^X}.$$

Lorsque t tend vers 0 avec $t > 0$, comme $X = \dfrac{x_0^2}{2t}$ et $x_0 \neq 0$, X tend vers $+\infty$.

Et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\sqrt{X}}{\mathrm{e}^X} = 0$, on a donc $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$.

c. $g'(t) = \left(-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}\dfrac{x_0^2}{2t^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x_0^2}{2t}}$

$$= \frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(\frac{x_0^2}{t} - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x_0^2}{2t}}.$$

d. Avec $t > 0$: $g'(t) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{t} - 1 > 0$

$\Leftrightarrow t < x_0^2$

$\Leftrightarrow t \in \,]0\,;x_0^2[$.

$g(x_0^2) = \dfrac{1}{|x_0|\sqrt{\mathrm{e}}}$.

t	0		x_0^2		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\lvert x_0\rvert\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	0

e. g admet un maximum en $t = x_0^2$.
Au point M d'abscisse $x_0 \neq 0$, l'élévation de température sera la plus élevée à l'instant x_0^2 et vaudra $\dfrac{1}{|x_0|\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Le tableau de variations donne la variation de l'élévation de la température.

f. Plus on s'éloigne de l'origine O, plus x_0 augmente, plus l'élévation maximale $\dfrac{1}{|x_0|\sqrt{\mathrm{e}}}$ diminue.

Pour aller plus loin

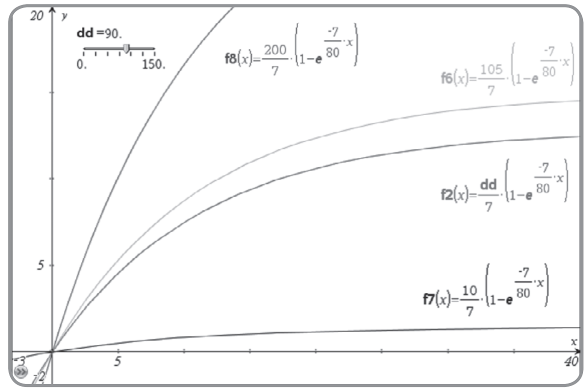
104 Partie A

1. a. $f(0) = 0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(t) = \dfrac{d}{c}$, car comme $c > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{c}{80}t} = 0$.

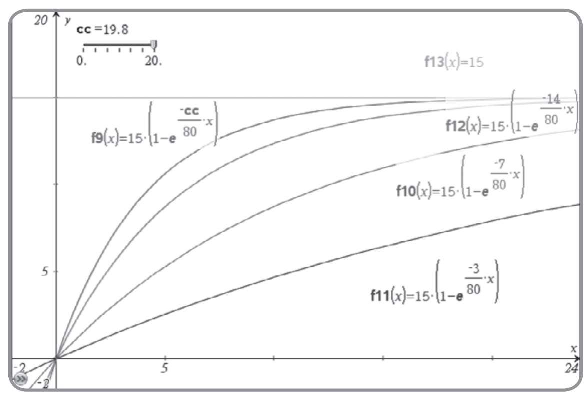
c. $f_1'(t) = -\dfrac{c}{80}\mathrm{e}^{-\frac{c}{80}t}$. Comme $c > 0$, $f_1'(t) < 0$ et f_1 décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2.



3. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(t) = 15 \Leftrightarrow \dfrac{d}{c} = 15 \Leftrightarrow d = 15c$.

b.



Partie B

1. d doit être $15 \times 7 = 105$.

2. a. $f_1(4) = \dfrac{105}{7}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}\times 4}\right) \approx 4{,}43$.

b. $f_1(4) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{105}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{80}\times 4}\right) = 5$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\frac{c}{20}} = \frac{c}{21} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{c}{20}} + \frac{c}{21} - 1 = 0.$$

c. $g'(x) = -\dfrac{1}{20}\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}} + \dfrac{1}{21}$; $g''(x) = \dfrac{1}{400}\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}$.

g' est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $g'(0) < 0$ et $g'(1) > 0$, g' est continue strictement croissante. Il existe une unique valeur α telle $g'(\alpha) = 0$.

Donc $g'(x) < 0$ pour $x \in \,]-\infty\,;\alpha]$ et $g'(x) > 0$ pour $x \in \,]\alpha\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
g	$\searrow$		0	$\searrow$		$\nearrow$	

Le tableau de variations indique les deux valeurs de x telles que $g(x) = 0$.

L'une d'entre elles est c_p. On obtient $1{,}9 < c_p < 2$.

3. La perfusion ne peut pas être poursuivie dans les mêmes conditions.

Comme $1{,}9 < c_p < 2$, on a $52{,}5 < \dfrac{d}{c} < 55{,}3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(t) = \dfrac{d}{c}$. À partir d'un certain temps, la concentration dépassera celle de 15, à ne pas dépasser (en fait, au-delà de 13 heures).

Partie C

1. a. $f_2(0) = 0$.

b. $\lim\limits_{t\to t_0, t<t_0} f_2(t) = \dfrac{d}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{80}t_0}\right)$.

$$\lim_{t\to t_0, t>t_0} f_2(t) = \frac{d}{c}\left(e^{\frac{c}{80}t_0} - 1\right)e^{-\frac{c}{80}t_0}$$

$$= \frac{d}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{80}t_0}\right) = f(t_0).$$

La fonction f_2 est donc continue en t_0.

c. $\lim\limits_{t\to+\infty} f_2(t) = 0$.

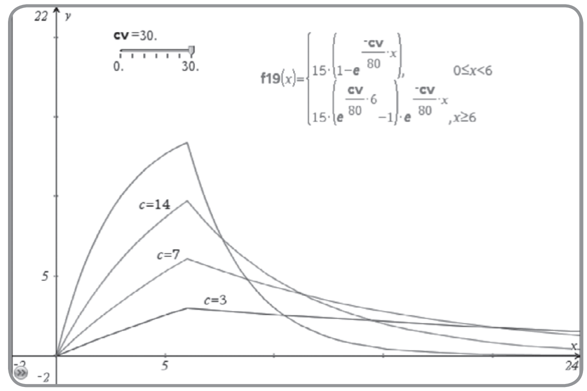
d. Sur $[0 ; t_0[$, f_2 est croissante comme f_1.

Sur $[t_0 ; +\infty[$, $f_2'(t) = -\dfrac{d}{80}\left(e^{\frac{c}{80}t_0} - 1\right)e^{-\frac{c}{80}t}$.

Comme $d > 0$ et $e^{\frac{c}{80}t_0} > 1$, on a $-\dfrac{d}{80}\left(e^{\frac{c}{80}t_0} - 1\right) < 0$ et f_2 est décroissante sur $[t_0 ; +\infty[$.

2. La concentration de produit augmente jusqu'à un maximum $\dfrac{d}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{80}t_0}\right)$, puis à partir de l'arrêt de la perfusion décroît en tendant vers 0.

3.



4. Pour $c = 7$ et $\dfrac{d}{c} = 15$, la concentration maximale est 6,13.

À partir de $t_1 = 13{,}9$, la concentration de produit dans le sang du patient sera inférieure ou égale à 6,13 (obtenu par encadrement).

Partie D

1. La durée t_0 de la première perfusion est obtenue comme solution de l'équation :

$15\left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right) = 10$, soit $e^{-\frac{7}{80}t} = \dfrac{1}{3}$. D'où : $e^{\frac{7}{80}t} = 3$.

2. Après la première perfusion, on attend que la concentration soit descendue à 5 (modélisation dans la partie C). Puis on fait une deuxième perfusion pour atteindre à nouveau 10 (translater en partie le premier tracé) et ainsi de suite.

3.