TS 27/06/2013

DS Exponentielle

Exercice 1 : (2 points)

On considère la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = 2e^x + ax + b$ où a et b sont des réels. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
Déterminer a et b sachant que :

- La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1\,;2e-2)$
- La tangent à $\mathcal{C}$ en O a pour coefficient directeur 3.

Exercice 2 : (3 points)

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On pose $v_n = e^{u_n}$. Montrer que (v_n) est géométrique et déterminer sa raison.
2. En déduire que la suite définie ci-après est géométrique et donner sa raison :

$$u_n = \frac{e^{(n+3)^2}}{e^{n^2}}$$

Exercice 3 : (5,5 points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x-3)e^{-x}$ et on donne ci-dessous son tableau de variations.

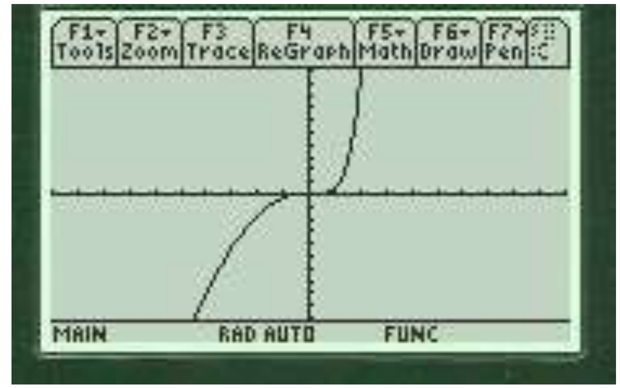
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$6e^{-\frac{3}{2}}$	↘ 0

Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau de variations.

Exercice 4 : (9,5 points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right)$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. On donne ci-dessous le graphique de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel qu'il apparait à l'écran d'une calculatrice.



   Quelle conjecture graphique peut-on faire sur les variations de f sur $[-3\,;2]$ au vu de ce graphe ?
2. Démontrer que pour tout réel x on $f'(x) = x\,g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
3. Etude du signe de g sur $\mathbb{R}$:
   (a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe selon les valeurs de x.
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction g.
   (d) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.
   (e) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier alors le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la conjecture initiale ?