TL 2017/2018

Chapitre 4 : La fonction exponentielle

I- Exponentielle de base q :

Soit q un réel strictement positif.
On admet qu'il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- Pour tous réels x, y on a $f(x+y) = f(x)f(y)$
- Pour tout entier naturel n, $f(n) = q^n$

Cette fonction s'appelle **exponentielle de base q** et par extension on la note pour tout réel x, **$f(x) = q^x$.**

Ce théorème est admis, la construction de ces fonctions ayant été vue en TP.

Propriétés :

Pour tous réels x, y et tout entier relatif n on a :

$q^0 = 1 \qquad q^x > 0 \qquad q^{x+y} = q^x q^y \qquad q^{-x} = \frac{1}{q^x}$

$q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y} \qquad (q^x)^n = q^{nx} \qquad q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$

Théorème :

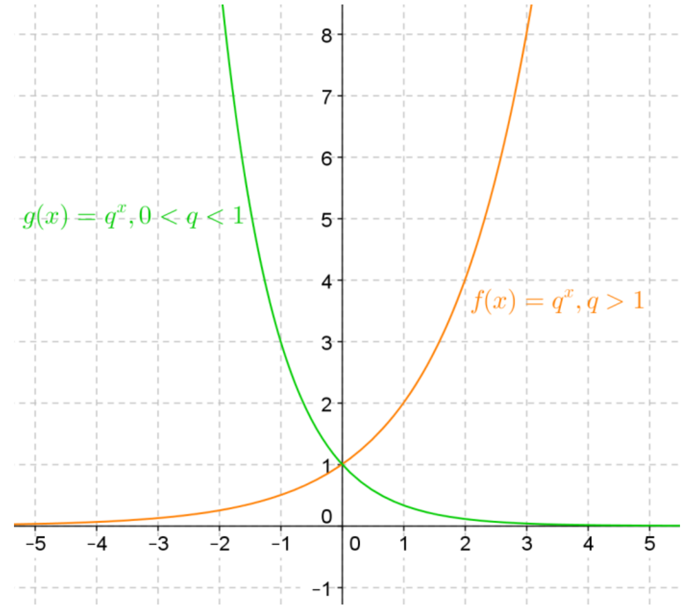
La fonction f exponentielle de base q est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et **convexe** sur $\mathbb{R}$

et on a $\boxed{f'(x) = f'(0)q^x}$

f est strictement croissante si $q > 1$

f est strictement décroissante si $0 < q < 1$

f est constante si $q = 1$



II- Fonction exponentielle :

Théorème :

Il existe un unique réel $e > 0$ tel que $f(x) = e^x$ vérifie $f'(0) = 1$.

La fonction ainsi définie s'appelle fonction **exponentielle**.

On a : $\boxed{e \approx 2{,}718}$.

Propriétés :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$e^x > 0$$

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

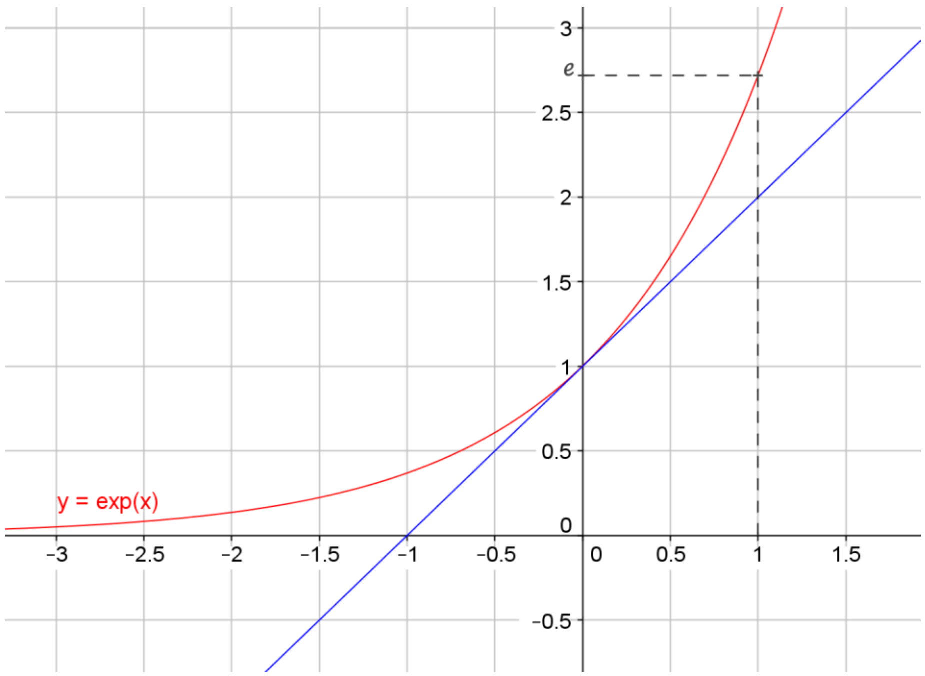
$$\boxed{e^x > 0, \qquad e^0 = 1 \qquad e^{x+y} = e^x e^y}$$

$$\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{nx} = (e^x)^n \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$$

III- Etude de la fonction exponentielle :

- La fonction exponentielle est strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0 ↗	$+\infty$



- La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{c} e^a < e^b \Leftrightarrow a < b \\ e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \\ e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \end{array}}$$

Exemple : Résoudre $e^x - 1 = 0, e^x + 2 = 0,\ e^{2x} + e^x - 2 = 0$

- La fonction définie par $x \to e^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\boxed{u'(x)e^{u(x)}}$

En particulier si $g(x) = e^{-3x}$ alors $g'(x) =$ ______________

Et pour $h(x) = e^{-6x^2}$, on a $h'(x) =$ ________________