1èreS Pour le 26/09/2012

DM Dérivation

Eléments de correction

1. On a $f(1) = -5$ car le point $A(1; -5)$ est sur la courbe de f et d'autre part $f'(1) = -12$ car la tangente en A est parallèle à une droite de coefficient directeur -12. Or f est une fonction polynôme donc dérivable sur $[-10\,;10]$ et on a $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 - 10x + b$.

On en déduit le système : $\begin{cases} 1 + a - 5 + b - 1 = -5 \\ 4 + 3a - 10 + b = -12 \end{cases}$ ie $\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b = -6 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \end{cases}$. Alors $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1$.

2. On a $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 10x + 3$. Or $f'(-1) = 0$ (racine évidente), on peut donc factoriser $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = (x+1)(4x^2 - \beta x + 3)$. Une analyse rapide des coefficients permettant de réaliser cette pré-factorisation.

On aura pour tout réel x : $4x^3 - 9x^2 - 10x + 3 = (x+1)(4x^2 - \beta x + 3)$ ssi on a : $4x^3 - 9x^2 - 10x + 3 = 4x^3 + (4-\beta)x^2 + (3-\beta)x + 3$

D'où $\begin{cases} 4 - \beta = -9 \\ (3 - \beta) = -10 \end{cases}$ et donc $\beta = 13$.

On a donc $f'(x) = (x+1)(4x^2 - 13x + 3)$.

3. Le signe de $f'(x)$ dépend à la fois du signe de $(x+1)$ et de celui de $4x^2 - 13x + 3$.

Or $4x^2 - 13x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 121$ et donc pour racines $x_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{24}{8} = 3$.

D'où le signe de $f'(x)$ et les variations de f :

x	-10		-1		$\frac{1}{4}$		3		10
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4x^2-13x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12469	↘	-5	↗	$-\frac{155}{256}$	↘	-37	↗	6529