1ère S **26/06/2013**

DS - Etude de fonction
Eléments de correction

Exercice 1 : (3 points) Du cours

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert et a un réel de I.
Expliquer ce que veut dire « f est dérivable en a ».

Voir votre cours

Exercice 2 : (5 points) Calcul de dérivées :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{x^3}{4} - 3x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$
- $g(x) = \frac{3x-1}{5}$ sur $\mathbb{R}$
- $h(x) = \frac{4x-2}{3x+1}$ sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
- $k(x) = x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Attention à ne pas vous tromper dans les formules :

$f'(x) = \frac{3x^2}{4} - 6x$

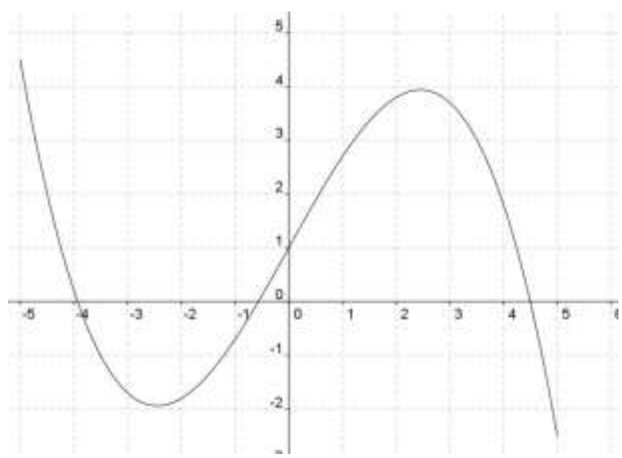
$g'(x) = \frac{3}{5}$, et oui, c'est une fonction affine

$h'(x) = \frac{10}{(3x+1)^2}$

$k'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

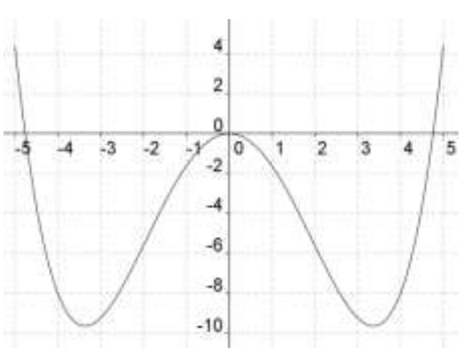
Exercice 3 : (5 points)

1- On donne la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction *f* définie sur [-5 ; 5]. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$, puis dresser le tableau de signe de *f* sur [-5 ; 5].

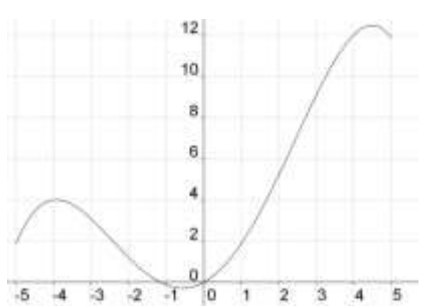


2- *f* est la dérivée d'une fonction *F* sur [-5 ; 5].
En justifiant, déterminer les variations de *F* .
Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle susceptible de représenter F. Justifier.

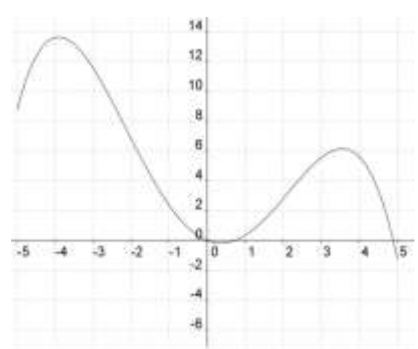
N°1



N°2



N°3



1- $f(x) = 0$ a pour solutions $-4\,;\, -\frac{1}{2}\ et\ \frac{9}{2}$ approximativement. Le signe de $f(x)$ est le suivant : $f(x) > 0\ sur\ [-5\,;\,-4[\,\cup\,]-\frac{1}{2};\frac{9}{2}[$ et $f(x) < 0\ sur\ ]-4\,;\,-\frac{1}{2}[\,\cup\,]\frac{9}{2}\,;5]$.

2- D'après le signe de $f = F'$, on déduit que F est croissante sur $[-5\,;\,-4[\ et\ sur\ ]-\frac{1}{2};\frac{9}{2}[$ et décroissante sur $]-4\,;\,-\frac{1}{2}[\ et\ sur\ ]\frac{9}{2}\,;5]$. Il s'agit donc de la deuxième courbe.

<u>Exercice 4 :</u> (8 points)

Partie A : Etude d'équation et inéquation :

1. Résoudre $x^2 - 10x + 1 > 0$.

Calcul du discriminant, racines : $S =]-\infty\,;5-2\sqrt{6}[\,\cup\,]5+2\sqrt{6}\,;\,+\infty[$

2. Résoudre $x^2 + x - 6 = 0$.

Calcul du discriminant, racines : $S = \{-2\,;3\}$

Partie B : Etude de la fonction *f* : définie par

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2+x-6}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f. Justifier.

f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\,;3\}$

2. Montrer que la dérivée de *f* est :

$$f'(x) = -\frac{x^2-10x+1}{(x^2+x-6)^2}$$

Calcul simple, attention au signe !!

3. En déduire les variations de *f*.

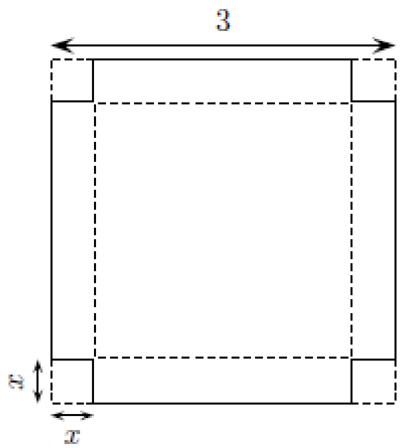
$\boldsymbol{f'}$ est du signe de $-(x^2 - 10x + 1)$ car $(x^2 + x - 6)^2 > 0$ sur $\mathbb{R} - \{-2\,;3\}$.

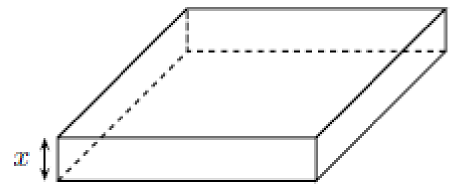
Attention aux valeurs -2 et 3, double barre dans le tableau.

<u>Exercice 5 :</u> (5 points) Optimisation

On veut construire une boîte métallique à partir d'une plaque carrée de 3 m de côté. A chaque coin de cette plaque, on découpe un carré de côté x m. En pliant et en soudant, on obtient une boîte sans couvercle, de volume $V(x)$.

1. Expliquer pourquoi x doit appartenir à l'intervalle [0 ; 1,5].
2. Démontrer que le volume de la boîte est en m^3 : $V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$.
3. Déterminer la valeur de x pour laquelle ce volume est maximal. Quel est alors ce volume ?





1. x doit appartenir à l'intervalle $[0\,;1{,}5]$ car c'est une longueur, elle est donc positive, et de plus elle doit être inférieure à la moitié du côté vue la configuration.
2. Le volume de la cuve est en m^3 : $V(x) = A_{base} \times hauteur = (3-2x)^2 \times x = 4x^3 - 12x^2 + 9x$.
3. On étudie $V(x)$: on a $V'(x) = 12x^2 - 24x + 9 = 3(4x^2 - 8x + 3)$.

   Or les racines dans $\mathbb{R}$ de $4x^2 - 8x + 3$ sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

   On en déduit les variations de $V(x)$ sur $[0\,;1{,}5]$ (à faire, facile) et la valeur de x pour laquelle ce volume est maximal : $\frac{1}{2}$. Le volume vaut alors $V\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ m^3$.

<u>Exercice 6 :</u> (4 points) Détermination d'une fonction

Soit f la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{0\,;-2\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{2x^2 + 4x}$$

où a, b sont deux réels. On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère.

Sans résoudre le problème, écrire les équations permettant de déterminer les réels a et b tels que C_f passe par le point A de coordonnées $(-1\,;2)$ et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

On a $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = 0$.

Ce qui se traduit pas les équations :

$\frac{1-a+b}{2} = 2$ et $\frac{4-2a}{4} = 0$ (car $f'(x) = \frac{4x^2-2ax^2-4bx-4b}{(2x^2+4x)^2}$)

<u>BONUS :</u> On donne la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2-1}$. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de g puis l'expression de $g'(a)$ en fonction de a.
Avec la limite du taux d'accroissement entre a et $a+h$, on trouve :

$$\boldsymbol{g'(a) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}$$