47 a. $\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}{2+2\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}-1}{2+2\cos\frac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{-2i\sin\frac{\pi}{3}}{3}$

$=\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

À noter que l'on peut aussi utiliser une factorisation par $e^{i\frac{\pi}{6}}$ aux numérateur et dénominateur mais qui fait intervenir (éventuellement) une tangente.

b. Voyons la méthode évoquée au a :

$\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right)}=\dfrac{-2i\sin\frac{\pi}{12}}{2\cos\frac{\pi}{12}}$

$=\tan\frac{\pi}{12}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$=(2-\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (*cf.* ex. 49)

On peut bien entendu le faire en passant par la forme algébrique et c'est plutôt la méthode qui est attendue auprès des élèves mais on peut évoquer cette méthode plus rapide.

48 a. $|-z|=r$ et $\arg(-z)=\pi+\theta$.

b. $|z^2|=r^2$ et $\arg(z^2)=2\theta$.

c. $|\bar{z}|=r$ et $\arg(\bar{z})=-\theta$.

d. $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{r}$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\theta$.

e. $\left|\dfrac{1}{z^3}\right|=\dfrac{1}{r^3}$ et $\arg\dfrac{1}{z^3}=-3\theta$.

f. $|z^n|=r^n$ et $\arg(z^n)=n\theta$.

49 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

50 a. Par propriété de l'exponentielle :

$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$. Puis $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$.

b. $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ et $e^{i\theta'}=\cos(\theta')+i\sin(\theta')$.

Donc $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=A$.

$A=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')$.

D'où $\cos(\theta+\theta')=\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'$

et $\sin(\theta+\theta')=\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'$.

c. Avec $\theta=\theta'$, on a $\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

et $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$.

51 a. $e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}=2i\sin\dfrac{\theta}{2}$.

b. $e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$.

c. $Z=\dfrac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=i\tan\dfrac{\theta}{2}$.

d. Calculons $1+Z^2$ et $1-Z^2$:

$Z^2=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2}$.

$Z^2=\dfrac{2\cos\theta-2}{2\cos\theta+2}=\dfrac{\cos\theta-1}{\cos\theta+1}$.

Donc $1+Z^2=\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+1}$ et $1-Z^2=\dfrac{2}{\cos\theta+1}$.

D'où $\dfrac{1-Z^2}{1+Z^2}=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

Puis $\cos\theta=\dfrac{1+Z^2}{1-Z^2}=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$.

$2Z=(1+Z)^2-(1+Z)^2$.

Donc $2Z=\left(\dfrac{2e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right)^2-\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+1}$.

$2Z=\dfrac{4e^{i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2}-\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+1}$

$=\dfrac{2e^{i\theta}}{\cos\theta+1}-\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+1}=\dfrac{2i\sin\theta}{\cos\theta+1}$.

Donc $\dfrac{2Z}{1-Z^2}=i\sin\theta$.

D'où $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$.

52 *Cet exercice est corrigé dans le manuel, p. 456.*

53 1. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=3+2i-(-2)=5+2i$.

$z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=3-2i-(-2)=5-2i$.

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=3-2i-(3+2i)=-4i$.

2. $AB=|5+2i|=\sqrt{29}$; $AC=|5-2i|=\sqrt{29}$

et $BC=|-4i|=4$.

c. $AB=AC$ donc ABC est isocèle en A.

De plus, $AB^2+AC^2\neq BC^2$ donc ABC n'est pas rectangle en A d'après la contraposée du théorème de Pythagore. Donc ABC est isocèle non rectangle en A.

54 a. $AB=|z_B-z_A|=|1+i-2+i|=|-1+2i|=\sqrt{5}$.

$AC=|z_C-z_A|=|1+2\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})-2+i|$

$=|-1+2\sqrt{3}+i(2+\sqrt{3})|=\sqrt{20}$.

$BC=|z_C-z_B|=|1+2\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})-1-i|=|2\sqrt{3}+i\sqrt{3}|=\sqrt{15}$.

b. $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{1-2i}{2\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\dfrac{1-2i}{\sqrt{3}(2+i)}$

$=\dfrac{(1-2i)(2-i)}{\sqrt{3}\times5}=\dfrac{2-2-i-4i}{5\sqrt{3}}=\dfrac{-i}{\sqrt{3}}$.

c. 1[re] méthode

On remarque que $AC^2=AB^2+BC^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.

2[e] méthode

$\arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Or $\arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$.

Donc $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et ABC est un triangle rectangle en B.

D'après a, on voit que ABC n'est pas isocèle. Donc ABC est rectangle en B.

55 a. $z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=8+24i$.

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=7+18i-3-6i=4+12i$.

b. $AC=\sqrt{8^2+24^2}=\sqrt{640}=8\sqrt{10}$.

$BC=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$.

$AB=|z_B-z_A|=|3+6i+1+6i|=|4+12i|=4\sqrt{10}$.

c. 1[re] méthode

$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{4+12i}{8+24i}=\dfrac{1}{2}$.

Donc $\arg\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=0\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ A, B et C sont alignés.

2[e] méthode

Par b, on voit que $AB+AC=BC$ donc les points sont alignés d'après l'inégalité triangulaire.

3[e] méthode

$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$ (d'après a) donc les vecteurs sont colinéaires d'où A, B, C sont alignés.

56 1. a. $|z+3|=MA$.

b. Soit B le point d'affixe $2-3i$.

Alors $|z-2+3i|=MB$.

$|z+3|=|z-2+3i|\Leftrightarrow MA=MB$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB].

2. Soit C le point d'affixe $-2+5i$.

$|z+2-5i|=4\Leftrightarrow MC=4$.

Donc cet ensemble de points est le cercle de centre C et de rayon 4.

3. Soit D le point d'affixe $2i$.

$|z-2i|\leqslant2\Leftrightarrow MD\leqslant2$.

Cet ensemble est donc le disque de centre D et de rayon 2.

4. Un module est toujours positif donc cet ensemble est vide.

5. Soit E le point d'affixe 1.

On a $\arg\left(\dfrac{z-1}{1+i}\right)=\arg(z-1)-\arg(1+i)$

$\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ donc $\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{4}\,[\pi]$.

D'où $(\vec{u},\overrightarrow{EM})=\dfrac{\pi}{4}[\pi]$.

L'ensemble des points est donc la droite passant par E, formant un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ dans le sens positif avec $\vec{u}$ et privée de E.

57 $z_A=3+2i$; $z_B=-3$ et $z_C=1-2i$.

Donc $AB=\sqrt{40}$; $BC=\sqrt{20}$ et $AC=\sqrt{20}$.

Le triangle ABC est donc isocèle rectangle en C.

58 $|3+iz|=|3-iz|\Leftrightarrow|i(-3i+z)|=|i(-3i-z)|$

$\Leftrightarrow|z-3i|=|z+3i|$.

Soit B le point d'affixe $3i$ et C le point d'affixe $-3i$.

Soit M le point d'affixe z.

$|3+iz|=|3-iz|\Leftrightarrow MB=MC$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [BC].

Or B et C sont symétriques par rapport à l'axe des réels car $-3i=\overline{3i}$. Donc $|3+iz|=|3-iz|\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Exercices d'approfondissement

59 a. Vrai. b. Vrai. c. Vrai. d. Vrai.

e. Faux car $\arg(z)=-\dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

60 a. Vrai. b. Vrai. c. Faux. d. Vrai. e. Vrai.

61 a. $\Delta=16-116=-100<0$ donc il y a deux solutions complexes :

$z_1=\dfrac{-4+i\sqrt{100}}{4}$ et $z_2=\dfrac{-4-i\sqrt{100}}{4}$.

Soit $z_1=-1+i\dfrac{5}{2}$ et $z_2=-1-\dfrac{5}{2}i$.

b. Les solutions sont $4+\dfrac{5}{2}i$, z_1 et z_2.

c. Il est rectangle et isocèle.

d. Soit $z_3=4+\dfrac{5}{2}i$.

Alors $z_3-z_1=5$ et $z_2-z_1=-5i$.

$|z_3-z_2|=|z_2-z_1|$ et $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=i$.

$\arg\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc le triangle est isocèle et rectangle.

62 a. $(-1)^3-5(-1)^2+19\times(-1)+25=-1-5-19+25=0$.

b. $z^3-5z^2+19z+25=(z+1)(z^2-6z+25)$.

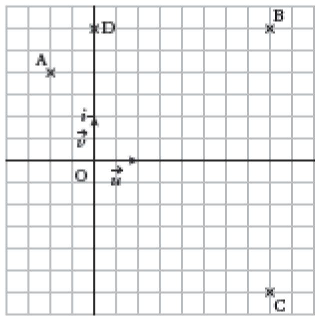
$\Delta=36-100=-64<0$ donc il y a deux solutions complexes z_1 et z_2 :

$z_1=\dfrac{6+8i}{2}$ et $z_2=\dfrac{6-8i}{2}$

soit $z_1=3+4i$ et $z_2=3-4i$.

c. Soit N l'image de z_1 et P l'image de z_2.
$MN = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$; $NP = 8$ et $MP = 4\sqrt{2}$.
d. $MN^2 + MP^2 = NP^2$.
Donc MNP est rectangle isocèle en M.

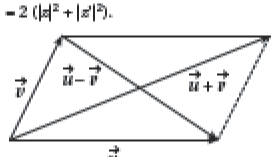
63 a.



b. ACD et BCD semblent rectangles en A et en B respectivement.
c. $z_C - z_B = -6i$ et $z_D - z_B = -4$ donc $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \dfrac{3}{2}i$
d'où $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et BCD est rectangle en B.
$z_D - z_A = 1 + i$ et $z_C - z_A = 5 - 5i$.
Donc $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = 5\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
D'où $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et ACD est rectangle en A.
d. D'après c, B et A appartiennent au cercle de diamètre [CD].
Le centre du cercle est donc le point d'affixe $\dfrac{z_C + z_D}{2} = 2$. Le rayon du cercle est $|2-3i| = \sqrt{13}$.

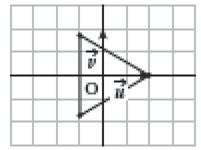
64 a. $|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z+z'}\right)$
et $|z-z'|^2 = (z-z')\left(\overline{z-z'}\right)$.
Donc $|z+z'|^2 + |z-z'|^2$
$= z\overline{z} + \cancel{z'\overline{z}} + \cancel{z\overline{z'}} + z'\overline{z'} + z\overline{z} - \cancel{z'\overline{z}} - \cancel{z\overline{z'}} + z'\overline{z'}$
$= 2(z\overline{z} + z'\overline{z'})$
$= 2\,(|z|^2 + |z'|^2)$.

b.

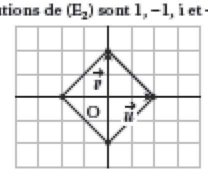


$\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont les vecteurs obtenus par les diagonales du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc la somme des carrés des longueurs des diagonales vaut la somme des carrés des côtés du parallélogramme.

65 1. a. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.
b. $\Delta = -3 < 0$ donc les racines sont complexes.
$x_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
c. Les solutions de (E_1) sont 1, $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.



d. Les solutions de (E_1) sont 1, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
2. a. $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$
$= (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$
b. Les solutions de (E_2) sont $1, -1, i$ et $-i$.



c. Les solutions de (E_2) sont 1, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
3. Un triangle équilatéral et un carré.
4. $x^8 = 1$ pour l'octogone régulier.
$x^7 = 1$ pour l'heptagone régulier.

66 a. $z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
b. On voit que z_A, z_B et z_C ont tous pour module 2, donc Γ est le cercle de centre O et de rayon 2.
d. $\dfrac{z_B - z_A}{z_C \quad z_A} = \dfrac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}$
$= \dfrac{2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$
$= \dfrac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Donc ABC est équilatéral.

67 a. $ze^{i\frac{\pi}{3}}$ est réel $\Leftrightarrow \arg\left(ze^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 0[\pi]$ (1)
(1) $\Leftrightarrow \arg(z) + \dfrac{\pi}{3} = 0[\pi]$
(1) $\Leftrightarrow \arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}[\pi]$
(1) $\Leftrightarrow$ M appartient à la droite passant par l'origine et formant un angle de $-\dfrac{\pi}{3}$ avec $\vec{u}$.
b. $|\overline{z} - 3 + 5i| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |z - 3 - 5i| = \sqrt{3}$
$\Leftrightarrow MA = \sqrt{3}$ avec A(3 + 5i)
$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$.
c. $\arg(z - i) = \quad \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \quad \dfrac{\pi}{4}[\pi]$ avec B(i)
$\Leftrightarrow$ M appartient à la droite passant par B et formant un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec $\vec{u}$, privée du point B.

68 $\arg\left(\dfrac{z-1+i}{z+5-3i}\right) = (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{RM})\ [2\pi]$.
a. $\left(\dfrac{z-1+i}{z+5-3i}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z-1+i}{z+5-3i}\right) = 0[\pi]$ (1)
(1) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{RM}) = 0\ [\pi]$ et $M \neq S$ ou $M = R$
(1) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MR}) = 0\ [\pi]$ et $M \neq S$ ou $M = R$
(1) $\Leftrightarrow M \in$ (SR) privée de S.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que
$\dfrac{z-1+i}{z \quad 5 \quad 3i} \in \mathbb{R}$ est la droite (SR) privée de S.
b. $\left(\dfrac{z \quad 1+i}{z+5-3i}\right) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z \quad 1+i}{z+5-3i}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ (2)
(2) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{RM}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $M \neq S$ et $M \neq R$
(2) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MR}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $M \neq S$ ou $M \neq R$
(2) $\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [SR] privé de S et de R.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que
$\dfrac{z-1+i}{z+5-3i} \in i\mathbb{R}$ est le cercle de diamètre [SR] privé de S et de R.

69 1. a. $z_{B'} = \dfrac{i-1-i}{i} = -\dfrac{1}{i} = i$.
b. $z' = 1 \Leftrightarrow z = z - 1 - i \Leftrightarrow -1 - i = 0$, impossible.
Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' \neq 1$.
2. $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z - 1 - i| = |z|$
$\Leftrightarrow MA = OM$
$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [OA].
3. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z') = 0\ [\pi]$
$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z-1-i}{z}\right) = 0[\pi]$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) = 0\ [\pi]$
$\Leftrightarrow$ M appartient à la droite (OA) privée de O.

70 a. $0^4 - 5\times0^3 + 6\times0^2 - 5\times0 + 1 \neq 0$, donc 0 n'est pas solution de (E).
b. $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$ (1)
(1) $\Leftrightarrow \dfrac{z^4 \quad 5z^3 + 6z^2 \quad 5z + 1}{z^2} = 0$ car $z \neq 0$
(1) $\Leftrightarrow z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 5\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + 6 = 0$.
c. $Z = z + \dfrac{1}{z}$ donc $Z^2 = z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2}$
donc $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = Z^2 - 2$.
d. $z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 5\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 2 - 5Z + 6 = 0$ (2)
(2) $\Leftrightarrow Z^2 - 5Z + 4 = 0$
(2) $\Leftrightarrow Z = 1$ ou $Z = 4$.
e. $z^2 - z + 1 = 0$.
$\Delta = -3 < 0$ donc il y a 2 solutions complexes z_1 et z_2 :
$z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
$z^2 - 4z + 1 = 0$.
$\Delta = 12 > 0$ donc il y a deux solutions réelles z_3 et z_4 :
$z_3 = \dfrac{4+\sqrt{12}}{2}$ et $z_4 = \dfrac{4-\sqrt{12}}{2}$.
Soit $z_3 = 2 + \sqrt{3}$ et $z_4 = 2 - \sqrt{3}$.
f. $Z = 1 \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = z$
$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = z_1$ ou z_2.
$Z = 4 \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = 4 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 4z$
$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = z_3$ ou z_4.
Les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$; $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$.

Objectif BAC

Se tester sur...

Les exercices de cette rubrique sont corrigés dans le manuel, p.456.

Sujets type BAC

79 *Cet exercice est résolu dans le manuel, p. 310.*

80

a. $Z = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)(2 \quad 2i)}{8}$
$= \dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} + i\dfrac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8}$
$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6} \quad \sqrt{2}}{4}$.

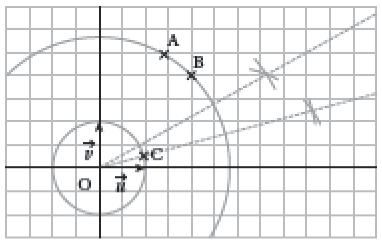
b. $z_1 = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$Z = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{Re}(Z) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

d.



e. Cet algorithme permet de calculer $(x_0 + iy_0)^n$ sous forme algébrique.

f. $Z^{2107} = e^{i\frac{\pi}{12}\times 2017}$

$= e^{i\left(\frac{2016\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

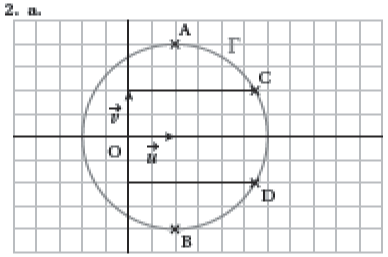
$= \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ \ i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

g. *Voir fichiers logiciels.*

81 1. $\Delta = -16 < 0$ donc il y a deux solutions complexes z_1 et z_2 :

$z_1 = \frac{2+i\sqrt{16}}{2} = 1+2i$ et $z_2 = 1-2i$.

2. a.



b. $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i} = \frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+3i}$

$= \frac{\left(-\sqrt{3}-3i\right)\left(-\sqrt{3}-i\right)}{4}$

$= \frac{3-3+\left(\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right)i}{4} = i\sqrt{3}$.

c. $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc ABC est rectangle en C.

3. A et B sont symétriques par rapport à l'axe des réels. C et D aussi. Comme ABC est rectangle en C, C appartient au cercle de diamètre [AB]. De même D appartient à ce cercle.
Le milieu de [AB] est le point d'affixe 1 et $AB = 4$.
Donc A, B, C, D appartiennent au cercle dont le centre est le point d'affixe 1 et de rayon 2.

4. *Cf. figure précédente.*

82 Partie A

1. $\alpha = \frac{1+3i}{1+i} = 2+i$ vérifie la deuxième équation.

2. En développant, $(z-\alpha)(z-i\alpha) = z^2 - \alpha z(1+i) + i\alpha^2$.
D'après 1, on a donc :
$(z-\alpha)(z-i\alpha) = z^2-(1+3i)z-4+3i = f(z)$.
$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2+i$ ou $z = i\alpha = -1+2i$.

Partie B

1. On a vu au A2 que $b = i\alpha$.

Donc $\arg\left(\frac{b-0}{a-0}\right) = \frac{\pi}{2}$ puis $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$.

OAB est isocèle rectangle en O.

2. Soit d l'affixe de D.
On a $OC = OD$ donc $|c| = |d|$.
Et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}$ donc $\arg\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{\pi}{2}$.

D'où $\frac{d}{c} = i$ et donc $d = ic = -\frac{1}{2} - i$.

3. L'affixe de M est $-1+\frac{5}{4}i$.

L'affixe de $\overrightarrow{DA}$ est $\frac{5}{2}+2i$.

$\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \frac{1+\frac{5}{4}i}{\frac{5}{2}+2i} = \frac{4+5i}{10+8i}$

$= \frac{(\ \ 4+5i)(10\ \ \ 8i)}{164}$

$= \frac{-40+40+50i+32i}{164} = \frac{i}{2}$.

4. $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

5. D'après 3, $\frac{OM}{DA} = \frac{1}{2}$ donc $OM = \frac{1}{2}DA$.

6. L a pour affixe $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

K a pour affixe $\frac{3}{4}$. M a pour affixe $\ \ 1+\frac{5}{4}i$.

$LK = \left|\frac{1}{4}-\frac{3}{2}i\right| = \frac{\sqrt{37}}{4}$.

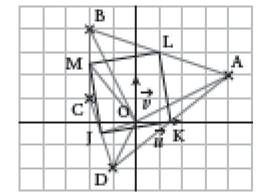
$LM = \left|\frac{3}{2}+\frac{1}{4}i\right| = \frac{\sqrt{37}}{4} = LK$.

Donc JKLM est un losange.

$(\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LM}) = \arg\left(\frac{z_M - z_L}{z_K \ \ z_L}\right) = \arg\left(\frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}i}{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}i}\right)$

$= \arg\left(\frac{1}{i}\right)$

$= \ \ \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Donc JKLM est un carré.



83 Partie A

On pose $z = x+iy$ avec x et y réels. Alors $\mathrm{Re}(z) = x$ et $\mathrm{Im}(z) = y$.

1. $\bar{z} = -z \Leftrightarrow x - iy = -(x+iy) \Leftrightarrow x - iy = -x - iy \Leftrightarrow 2x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs.

2. $\bar{z} = z \Leftrightarrow x - iy = x + iy \Leftrightarrow -2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

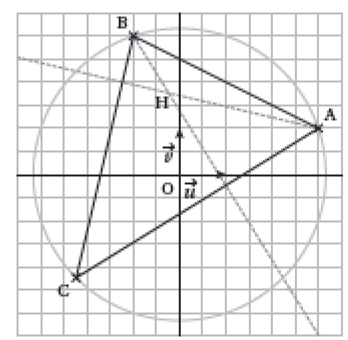
Partie B

1. $OA = |a| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$;

$OB = |b| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$; $OC = |c| = \sqrt{5+5} = \sqrt{10}$.
Donc $OA = OB = OC$ ce qui signifie que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Le point H a pour affixe $h = \left(2\ \ \ \sqrt{5}\right)+\left(4\ \ \ \sqrt{5}\right)i$.

Les points A et B se placent aisément. Le point C appartient au cercle de centre O, de rayon OA et à la droite d'équation réduite $y = x$. Pour placer le point H, on utilise la calculatrice et on obtient :
$h \approx -0{,}24 + i \times 1{,}76$.



On « voit » que H est l'orthocentre de ABC.

Problèmes

84 Partie A

a. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

b. $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ donc $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

c. $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$

$= \frac{e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8}$

$= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}}{8}$.

d. $\cos^3 x = \frac{2\cos(3x)+6\cos x}{8}$

$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x$.

e. $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$.

$\sin^3 x = \frac{-1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin x$.

$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$.

Partie B

a. $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x + 3i^2\cos x$
$\sin^2 x + i^3\sin^3 x$
$= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$.

b. $e^{i3x} = \cos 3x + i\sin 3x$.

Donc $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$.

c. $\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$.

d. De même,
$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$
et $\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\sin^3 x\cos x$.

85 a. ABL est isocèle, rectangle et indirect en L.

Donc $|a-l| = |b-l|$ et $\arg\left(\frac{a-l}{b-l}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

D'où $\frac{a-l}{b-l} = i \Leftrightarrow a - l = i(b-l) \Leftrightarrow a - ib = l(1-i)$.

D'où $l = \frac{a-ib}{1-i}$.

b. De même, par symétrie :

$m = \frac{b\ \ \ ic}{1-i}$; $n = \frac{c\ \ \ id}{1-i}$; $p = \frac{d\ \ \ ia}{1-i}$.

c. $\frac{n-l}{m-p} = \frac{(c-a)-i(d-b)}{(b-d)-i(c-a)}$

$= \frac{(c-a)-i(d-b)}{-i((c-a)+i(b-d))}$

$= \frac{1}{-i} = i$.

d. D'après c, $\dfrac{|n-l|}{|m-p|}=1$ donc LN = MP

et $\arg\left(\dfrac{n-l}{m-p}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{LN})=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ donc (MP) $\perp$ (LN).

D'où le théorème de Van Aubel :

LN = MP et (MP) $\perp$ (LN).

86 **a.** ($\Rightarrow$) est immédiat et vient de la définition d'un triangle équilatéral.

($\Leftarrow$) Si RS = RQ alors QRS est isocèle en R donc $(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QS})=(\overrightarrow{SQ},\overrightarrow{SR})$ $[2\pi]$. Or $(\overrightarrow{RS},\overrightarrow{RQ})=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et la somme des angles du triangle QRS vaut π.

Donc $(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QS})=(\overrightarrow{SQ},\overrightarrow{SR})=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

D'où QRS est équilatéral.

b. $j^2=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

D'où $j^2=e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}}=\ \ e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $e^{i\frac{\pi}{3}}=\ \ j^2$.

$1+j+j^2=1-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$ donc $1+j+j^2=0$.

c. D'après a :

QRS équilatéral direct $\Leftrightarrow$ RS = RQ et

$$(\overrightarrow{RS},\overrightarrow{RQ})=\frac{\pi}{3}[2\pi]\ (1)$$

(1) $\Leftrightarrow |z_R-z_S|=|z_Q-z_R|$ et $\arg\left(\dfrac{z_Q-z_R}{z_S-z_R}\right)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{z_Q\ \ z_R}{z_S-z_R}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

(1) $\Leftrightarrow z_Q-z_R=-j^2(z_S-z_R)$.

QRS équilatéral direct $\Leftrightarrow z_Q-z_R=j^2(z_R-z_S)$.

d. ABD est équilatéral direct donc $d-a=j^2(a-b)$.

$d=j^2a-j^2b+a$ d'où $d=(j^2+1)a-j^2b$

puis $d=(1+j)b-ja$.

$m=\dfrac{a+b+d}{3}=\dfrac{a+b+(j+1)b-ja}{3}$.

Donc $m=\dfrac{(1+j+1)b+(1-j)a}{3}$

$m=\dfrac{(1\ \ j^2)b+(1\ \ j)a}{3}$ car $1+j=-j^2$.

$(1-j)m=\dfrac{(1-j^2-j+1)b+(1-2j+j^2)a}{3}$

$=\dfrac{3b-3ja}{3}$ car $-j^2-j=1$ et $1+j^2=-j$.

$(1-j)m=b-ja$.

Par symétrie, on aurait :

$(1-j)n=c-jb$ et $(1-j)p=a-jc$.

e. Soustrayons les deux expressions :

$(1-j)(m-n)=b-ja-c+jb=-c-ja-j^2b$ (car $1+j=-j^2$).

Et $(1-j)(n-p)=c-jb-a+jc=-a-jb-j^2c$.

Donc $(1-j)(m-n)=j^2(1-j)(n-p)$.

D'où $m-n=j^2(n-p)$.

f. Comme $m-n=j^2(n-p)$, le triangle MNP est équilatéral direct.

g. Faisons la somme des trois expressions du e :

$(1-j)(m+n+p)=b-ja+c-jb+a-jc$

$=(1-j)(a+b+c)$.

D'où $\dfrac{m+n+p}{3}=\dfrac{a+b+c}{3}$.

Donc MNP et ABC ont le même centre de gravité et MNP est un triangle équilatéral.

87 **1. a.** Soit $z=re^{i\theta}$.

$z^5=1\Leftrightarrow r^5e^{i5\theta}=1\Leftrightarrow r^5=1$ et $5\theta=2\pi\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow r=1$ et $5\theta=2\pi\ [2\pi]$.

b. Les solutions de cette équation sont sur le cercle de centre O et de rayon 1.

c. $z=e^{i\theta}$; $\dfrac{1}{z}=e^{-i\theta}$ donc $z+\dfrac{1}{z}=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$.

d. $1^5-1=0$ et $\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5=1$

donc 1 et $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ sont solutions de (E).

En notant $z_0=1$ et $z_1=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\arg\left(\dfrac{z_1-0}{z_0\ \ 0}\right)=\dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$.

Les images de z_0 et z_1 sont donc deux sommets consécutifs d'un pentagone régulier. En reportant cet angle sur le cercle unité, on obtient alors les autres sommets du pentagone. De plus, d'après 1a, les solutions autres sont $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{5}}$ donc sont les autres sommets du pentagone.

2. a. $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=z^5-1$.

b. $z^5-1=0\Leftrightarrow z-1=0$ ou $z^4+z^3+z^2+z+1=0$

$\Leftrightarrow z=1$ ou z solution de (E').

c. $z^4+z^3+z^2+z+1=0\Leftrightarrow z^2\left(z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}\right)=0$

pour $z\neq 0$

$\Leftrightarrow z^2\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}+z+\dfrac{1}{z}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow Z^2-2+Z+1=0$

car $z\neq 0$ et $z^2+\dfrac{1}{z^2}=Z^2-2$

$\Leftrightarrow Z^2+Z-1=0$ pour $z\neq 0$.

d. z solution de (E') $\Leftrightarrow Z=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $Z=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

car $\Delta=5$.

e. D'après 1c, $Z=2\cos\theta$.

z solution de (E) $\Leftrightarrow z'=1$ ou $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

ou $\cos\theta=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ d'après 1d et 1b.

3. a. $AB=\left|\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.