# Continuité, convexité

## I- Dérivée et variations :

### 1.1 Lien dérivée, sens de variation :

Activité bénéfices

Théorème (admis, rappel de 1ère )

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
- Si $f'$ est strictement positive sur $I$ (sauf sur un nombre fini de points où elle s'annule), alors $f$ est strictement croissante sur $I$.
- Si $f'$ est strictement négative sur $I$ (sauf sur un nombre fini de points où elle s'annule), alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.
- Si $f'$ est nulle sur $I$, alors la fonction $f$ est constante sur $I$.

Si $f$ est dérivable en $a$ alors la courbe représentative de $f$ admet une tangente au point d'abscisse $a$ d'équation : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$. $f'(a)$ est la pente ou coefficient directeur de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse $a$.

### 1.2 Dérivées usuelles :

| **Fonction** | **Dérivée** | **Commentaire** |
|---|---|---|
| $x \longmapsto x$ | $x \longmapsto 1$ | Sur $\mathbb{R}$ |
| $x \longmapsto x^n$ | $x \longmapsto nx^{n-1}$ | Sur $\mathbb{R}$ si $n > 0$<br>Sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$ |
| $x \longmapsto \frac{1}{x}$ | $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ | Sur $\mathbb{R}^*$ |
| $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | Sur $\mathbb{R}^{+*}$ |

Pour deux fonctions $u$ et $v$ dérivables sur un intervalle $I$, et le cas échéant (quotient, inverse) telles que $v(x) \neq 0$ pour tout $x$ de $I$, on a :

| | |
|---|---|
| $(u+v)' = u' + v'$ | $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ |
| $(ku)' = ku'$ | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $(uv)' = u'v + uv'$ | $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ |

Exercices : 13 à 33 p 79, 40 à 49 p 81 (dériv) puis 35 à 39 p 80 (tgt) et 40 à 49

## II- Continuité et équations :

### 2.1 Notion intuitive de continuité :

Activité impôts

- Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.
- On admet que toutes les fonctions usuelles (polynômes, fonctions rationnelles, irrationnelles) sont continues sur chaque intervalle où elles sont définies, ainsi que les fonctions obtenues par opération sur les fonctions usuelles.

Exemples importants :

$x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$

Théorème (admis)

Toute fonction dérivable est continue.

❖ Dans les tableaux de variations, on convient que les flèches représentent à la fois la stricte monotonie et la continuité de la fonction.

<u>Exercices :</u>

1. On pose $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2}x \text{ si } x \in [-2;0[ \\ 2x \text{ si } x \in [0;2[ \end{cases}$

Tracer la courbe de $f$ ; la fonction $f$ est-elle continue sur $[-2;2]$ ?

2. On pose $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \in [0;1[ \\ 2 \text{si } x \in [1;2[ \\ f(x) = 3 \text{ si } x \in [2;3] \end{cases}$

Tracer la courbe de $f$ ; la fonction $f$ est-elle continue sur $[0;3]$ ?

Exercices : 7 à 12 p 79

## 2.2 Propriété des valeurs intermédiaires :

Activité TVI

### Théorème (admis)

Soit une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Elle prend alors toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$. Donc pour tout réel $\alpha$ situé entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.

Ce théorème est souvent utilisé dans le cas où $f(a)$et $f(b)$ sont de signes contraires, pour prouver l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$.

<u>Exercice:</u> On définit une fonction $f$ sur $[-1\,;3]$ ainsi : $f(x) =$
$\begin{cases} x \text{ si } x \in [-1;0[ \\ x^2 \text{si } x \in [0;2[ \\ -x+6 \text{ si } x \in [2;3] \end{cases}$

1. Construire sa courbe représentative et vérifier graphiquement que $f$ est continue sur $[-1\,;3]$
2. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ a une unique solution $\alpha$ dans $]0;2[$.
3. Donner une valeur approchée de $\alpha$ au centième. Peut-on donner sa valeur exacte ?

### Corollaire (admis) : cas d'une fonction strictement monotone

Soit une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$. Elle prend alors toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$ une et une seule fois. Donc pour tout réel $\alpha$ situé entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.

<u>Exercice :</u> Etudier le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 9x^2 + 15x + 3 = 0$ sur $[-1\,;7]$. Donner un encadrement d'amplitude $10^{-3}$ de la plus grande des solutions.

<u>Remarque :</u> En pratique, la référence au tableau de variation d'une fonction peut remplacer la vérification des 4 conditions d'application du théorème : une flèche traduit la <u>continuité</u> et la <u>stricte monotonie</u> de la fonction, les valeurs importantes sont affichées : <u>$f(a) < k < f(b)$</u>

<u>Exercice :</u> soit $f$ définie sur $[-10;10]$ de tableau de variation ci-dessous :

| $x$ | $-10$ | | -3 | | 4 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 2 | ↘ | - 8 | ↗ | 7 |

1. Prouver que l'équation $f(x) = 4$ a une unique solution $\alpha$ dont on donnera un encadrement.
2. Quel est le nombre de solution de l'équation $f(x) = -5$ ? Justifier.

Exercices : 51 à 56 p 82

## 3. Convexité et inflexion :

Exemples de la fonction carrée et de la fonction racine carrée

### 3.1 Fonction convexe :

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $C_f$ sa courbe représentative. Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de $C_f$, le segment $[AB]$ est entièrement situé au-dessus de la courbe, on dit que la fonction $f$ est convexe.

**RQE :** Cela revient à dire que la courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur l'intervalle.

**Exemples importants :**

- La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

**Propriété (admise) :** Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f$ est convexe sur un intervalle $I$
- $f'$ est croissante sur $I$,
- $f''$ est positive sur $I$.

### 3.2 Fonction concave :

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $C_f$ sa courbe représentative. Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de $C_f$, le segment $[AB]$ est entièrement situé en-dessous de la courbe, on dit que la fonction $f$ est concave.

**RQE :** Cela revient à dire que la courbe est située en-dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle.

**Exemples importants :**

- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;\,+\infty[$ ;
- La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;0[$.
- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;0]$.

**Propriété (admise) :** Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

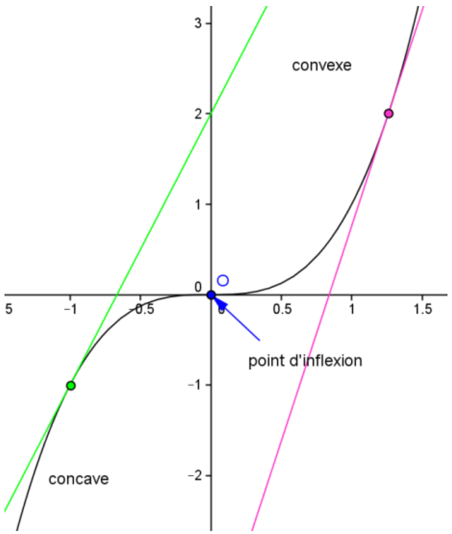
- $f$ est concave sur un intervalle $I$
- $f'$ est décroissante sur $I$,
- $f''$ est négative sur $I$.

**RQE :** si $f$ est une fonction concave, alors $-f$ est une fonction convexe.

### 3.3 Point d'inflexion :

**Définition :** Soit $f$ définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $C_f$ sa courbe représentative. S'il existe un point $A$ de $C_f$ en lequel la courbe traverse la tangente, alors ce point s'appelle un point d'inflexion de $C_f$.

- Un point d'inflexion traduit un changement de convexité, et donc un changement de sens de variation de la dérivée. Il s'agit donc d'un point où la derivée seconde $f''$ s'annule, en changeant de signe (si la fonction est deux fois dérivable)




Exemple : L'origine du repère est le point d'inflexion de la courbe représentant la fonction cube.

Exercices : 59 à 72 p 83
Problèmes : 80, 81 p 86, 98, 102
Devoir maison : 97 p 90, 100 p 92