TL1 **DM1**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10 - \frac{8}{x}$

1. **Etude de $\boldsymbol{f}$:**

a) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;10]$.

b) Calculer $f(0{,}1)$ puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans$]0\,;10]$. On nommera α la plus petite des deux.

c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

d) En déduire le signe de f sur $]0\,;10]$.

2. **On étudie alors une fonction $\boldsymbol{g}$ telle que pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de $]\mathbf{0}\,;\mathbf{10}]$ on ait : $\boldsymbol{g''(x) = f(x)}$.**

a) Etudier la convexité de g sur $]0\,;10]$ et les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de g.

b) Tracer une courbe susceptible de représenter g.

TL1 **DM1**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10 - \frac{8}{x}$

1. **Etude de $\boldsymbol{f}$:**

a) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;10]$.

b) Calculer $f(0{,}1)$ puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans$]0\,;10]$. On nommera α la plus petite des deux.

c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

d) En déduire le signe de f sur $]0\,;10]$.

2. **On étudie alors une fonction $\boldsymbol{g}$ telle que pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de $]\mathbf{0}\,;\mathbf{10}]$ on ait : $\boldsymbol{g''(x) = f(x)}$.**

a) Etudier la convexité de g sur $]0\,;10]$ et les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de g.

b) Tracer une courbe susceptible de représenter g.

TL1 **DM1**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10 - \frac{8}{x}$

1. **Etude de $\boldsymbol{f}$:**

a) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;10]$.

b) Calculer $f(0{,}1)$ puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans$]0\,;10]$. On nommera α la plus petite des deux.

c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

d) En déduire le signe de f sur $]0\,;10]$.

2. **On étudie alors une fonction $\boldsymbol{g}$ telle que pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de $]\mathbf{0}\,;\mathbf{10}]$ on ait : $\boldsymbol{g''(x) = f(x)}$.**

a) Etudier la convexité de g sur $]0\,;10]$ et les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de g.

b) Tracer une courbe susceptible de représenter g.

TL1 **DM1 Corrigé**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10 - \frac{8}{x}$

1. **Etude de f :**

a) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;10]$.

On a $f'(x) = -\frac{1}{2}(2x) - 8\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -x + \frac{8}{x^2} = \frac{-x^3+8}{x^2}$

Or $x^2 > 0$ **sur** $]0\,;10]$ et $-x^3 + 8 > 0$ si et seulement si $x^3 < 8$ $soit$ $x < 2$.

D'où le tableau :

x	0		2		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$\parallel$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-40{,}8$

b) Calculer $f(0{,}1)$ puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $]0\,;10]$. On nommera α la plus petite des deux.

$$f(0{,}1) = -\frac{14001}{200}$$

- Sur l'intervalle $]0\,;0{,}1]$, f est strictement croissante et $f(0{,}1) < 0$. Donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0\,;0{,}1]$. On la nomme α.
- On voit donc que la fonction f est continue sur $]0{,}1\,;2]$ et strictement croissante. De plus $f(0{,}1) < 0$ et $f(2) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique dans $]0{,}1\,;2]$.
- Enfin, la fonction f est continue sur $[2\,;10]$ et strictement décroissante. De plus $f(10) < 0$ et $f(2) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique dans $[2\,;10]$. On la nomme β.

c) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

d) En déduire le signe de f sur $]0\,;10]$.

Du tableau de variations, on déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		β		10
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. On étudie alors une fonction g telle que pour tout réel x de $]0\,;10]$ on ait : $g''(x) = f(x)$.

a) Etudier la convexité de g sur $]0\,;10]$ et les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de g.

D'après le tableau précédent :

g'' est négative sur $]0\,;\ \alpha[$ ainsi que sur $]\beta\,;10[$. Sur chacun de ces intervalles, g est donc concave. En revanche, g'' est positive sur $]\alpha\,;\ \beta[$, g est donc convexe sur cet intervalle.

Les points d'inflexion de C_g sont ceux où g'' s'annule en changeant de signe. Il s'agit donc des points d'abscisses respectives α et β.

b) Tracer une courbe susceptible de représenter g.

Il faut tracer une courbe concave, puis convexe et enfin concave en respectant les valeurs approchées de α et β (dont on peut déterminer la valeur approchée de façon rapide à la calculatrice afin de faire un graphe le plus correct possible).