TL – Chapitre 2 : Conditionnement et indépendance

Activité Test de dépistage et Sammy Clrk en intro

1. Probabilité de A sachant B : Théorème de Bayes :

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité que $\boldsymbol{B}$ **se réalise sachant que** $\boldsymbol{A}$ **est réalisé,** est le nombre noté $P_A(B)$ et défini par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

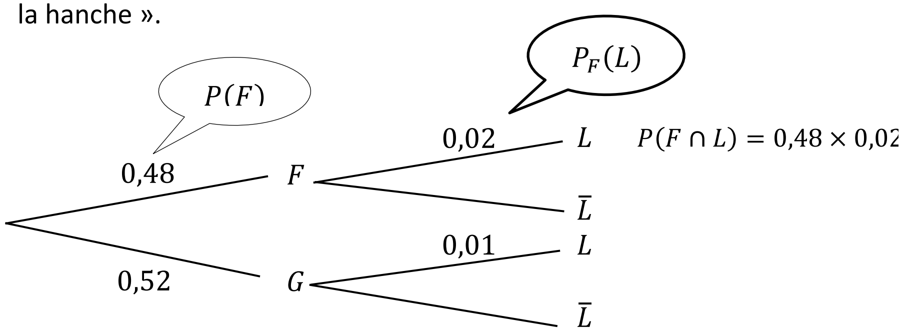
On utilise très souvent cette formule afin de déterminer la probabilité d'une intersection :

$$\boxed{P(A \cap B) = P_A(B)\, P(A) = P_B(A) P(B)}$$

Ex 3, 5, 6, 8 p 224

2. Modélisation par un arbre : Exemple :

Dans une population, la probabilité de naissance d'un garçon est 0,52. On sait que 2% des filles et 1% des garçons naissent avec une luxation congénitale de la hanche.
Représenter cette situation par un arbre, en nommant F l'événement « naissance d'une fille », G « naissance d'un garçon » et L « le nouveau-né a une luxation de la hanche ».



Règles d'utilisation d'un arbre pondéré :

- **Loi des nœuds** : la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au **produit des probabilités** inscrites sur les branches de ce chemin.

Ex 18 et 19 p 225

3. Formule des probabilités totales :

Dans un univers Ω, on appelle **système complet d'événements** un ensemble d'événements de probabilités non nulles, deux à deux disjoints, dont la réunion est égale à Ω. Il s'agit d'une **partition de l'univers** $\boldsymbol{\Omega}$.

Théorème : Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements de l'univers Ω, et B un événement quelconque de Ω.
On a $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_2}(B)$.

On utilise souvent cette formule en utilisant la partition $\Omega = B \cup \bar{B}$:

$$\boxed{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P_B(A).P(B) + P_{\bar{B}}(A).P(\bar{B})}$$

4. Exemple :

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt, on peut le guérir ; sinon, la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test de dépistage préventif de la maladie.
On note M l'événement : « l'animal est porteur de la maladie » et T l'événement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. Un animal est choisi au hasard :
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?

Ex 22, 26, 32, 35, 38 p 224
Rappels : variables aléatoires, variance, loi binomiale : ex 39 et 40 p 233
DM Ex 33 p 231

Algo : TP 1 et 2 p 220