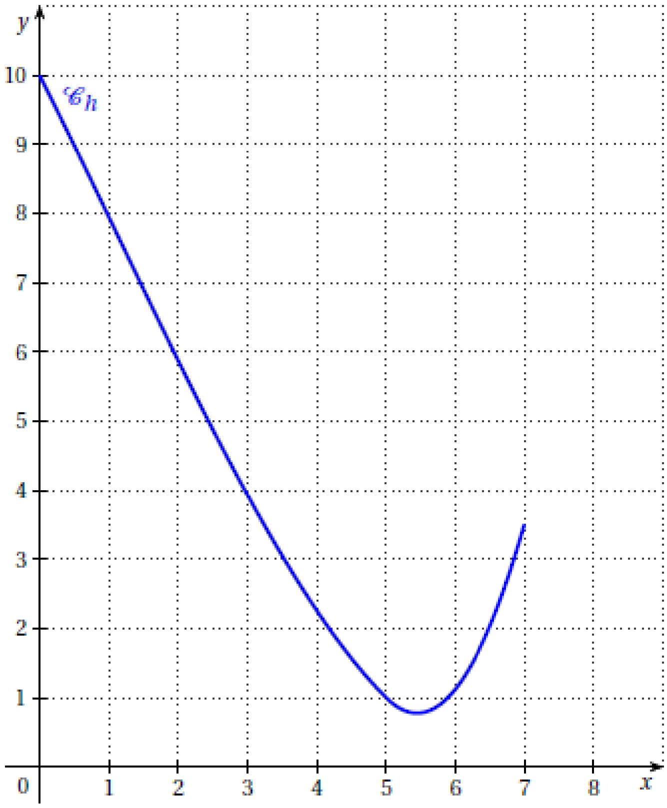
Exercices entraînement intégrales

1) QCM :

A) On considère la fonction h définie sur $[0\,;\,7]$ et représentée par la courbe ci-dessous :



a. $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = h(5) - h(0)$

b. $\displaystyle 20 < \int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 30$

c. $\displaystyle 15 < \int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 20$

d. $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = 20$

B) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.
Une primitive H de h peut être définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $H(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}$

b. $H(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+2}$

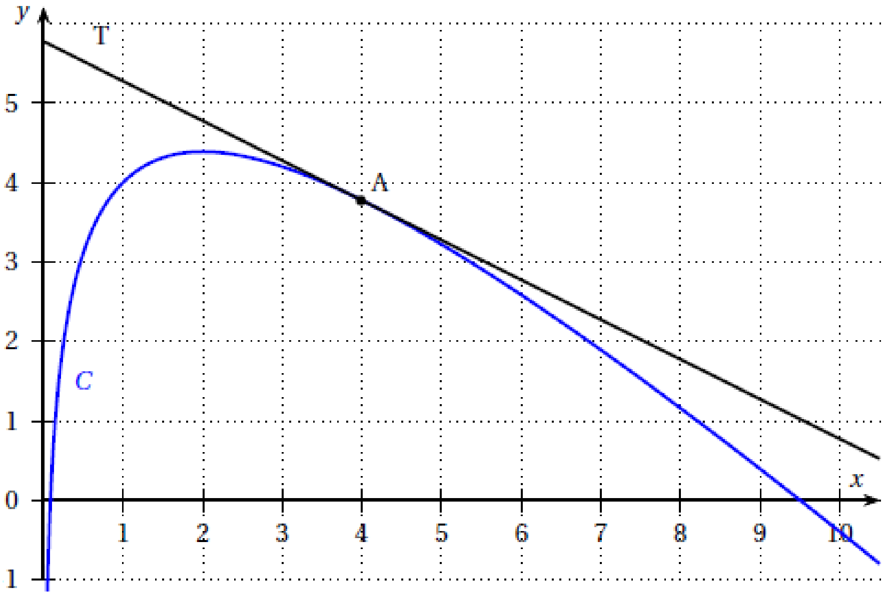
c. $H(x) = (3x+2)\mathrm{e}^{3x+2}$

d. $H(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$

2) Soit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par

$$f(x) = 5 - x + 2\ln x.$$

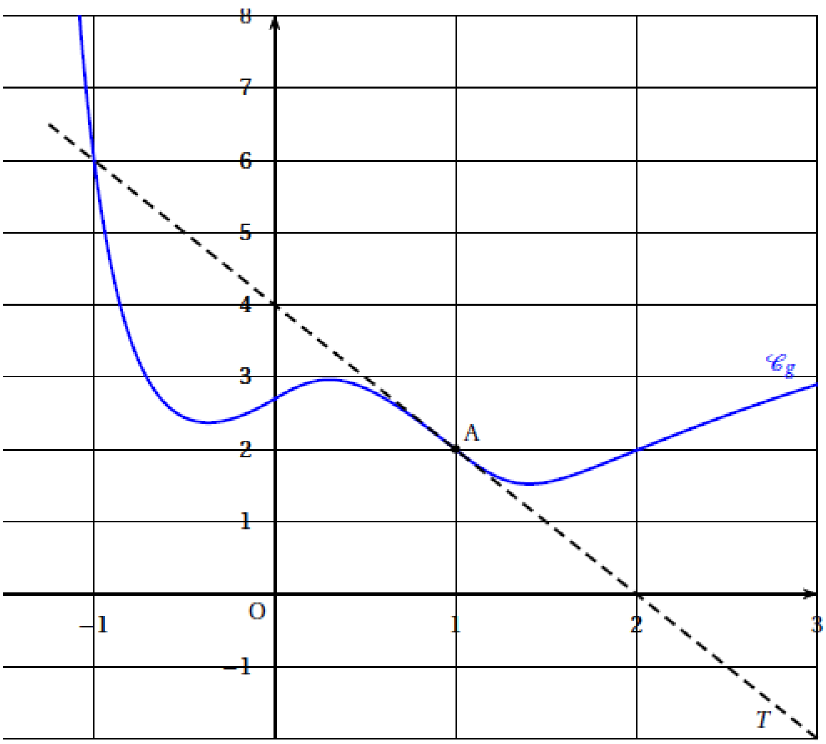
On a représenté ci-dessous la courbe représentative C de la fonction f, ainsi que T, la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 4.



La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à l'intervalle :

a. $[1\,;3]$ **b.** $[4\,;5]$ **c.** $[8\,;9]$ **d.** $[10\,;15]$

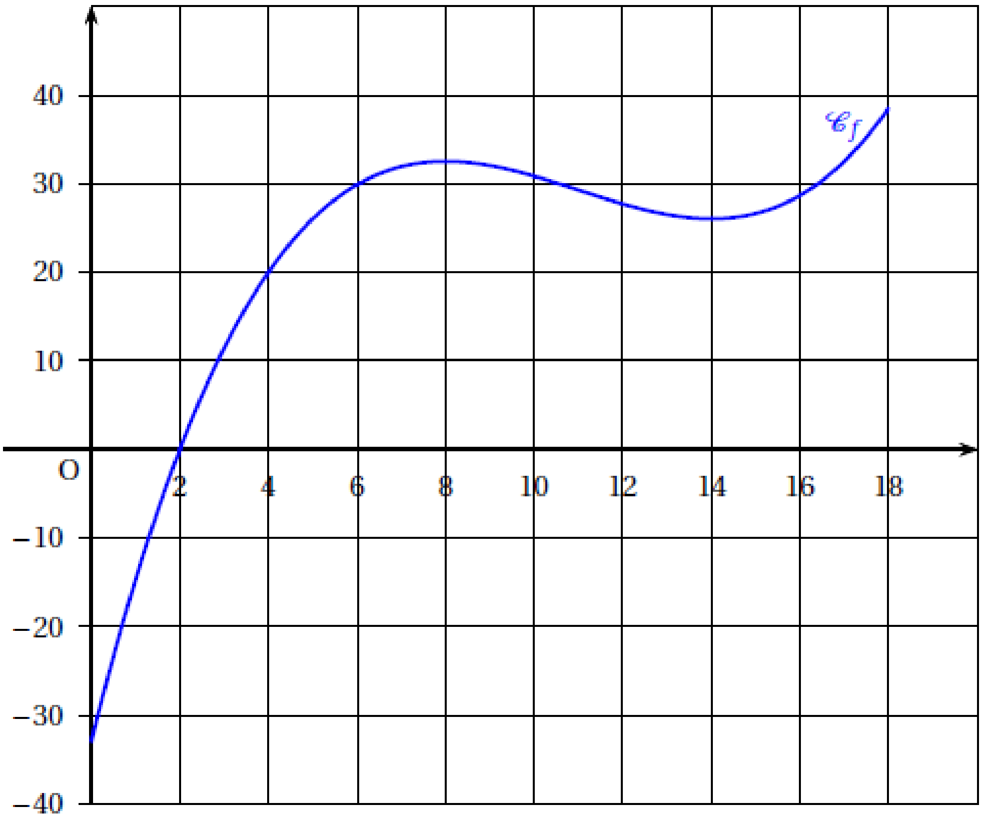
3) On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.



Vrai ou faux, justifier :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3.$$

4) On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0 ; 18]$.



On peut affirmer que :

a. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 18]$ sont négatives sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

b. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 18]$ sont négatives sur l'intervalle $[8 ; 12]$.

c. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

d. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[8 ; 12]$.

5) A) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$ par

$$f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10.$$

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,1{,}5]$ par

$$F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x.$$

a. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,1{,}5]$.

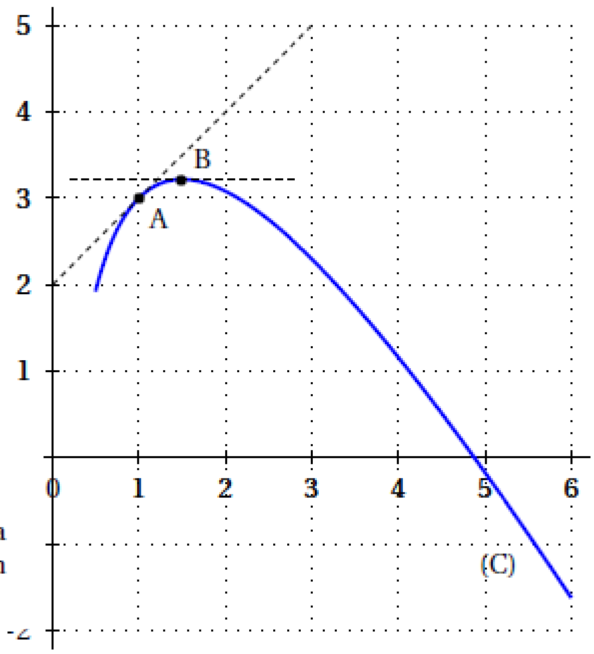
b. Calculer $\displaystyle\int_1^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
On donnera le résultat arrondi au centième.

B) *Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Une société est cotée en bourse depuis un an et demi.
Le prix de l'action depuis un an et demi est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre d'années écoulées depuis l'introduction en bourse et $f(x)$ représente le prix de l'action, exprimé en euros.
Vrai ou faux, justifier :

« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 €. »*

6) La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5\,;\,6]$. Les points A$(1\,;\,3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.



On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}5\,;\,6]$ par

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x).$$

On considère la fonction F définie sur $[0{,}5\,;\,6]$ par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.

a. Montrer que F est une primitive de f sur $[0{,}5\,;\,6]$.

b. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

7) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par :

$$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}.$$

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.

Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par la fonction f.

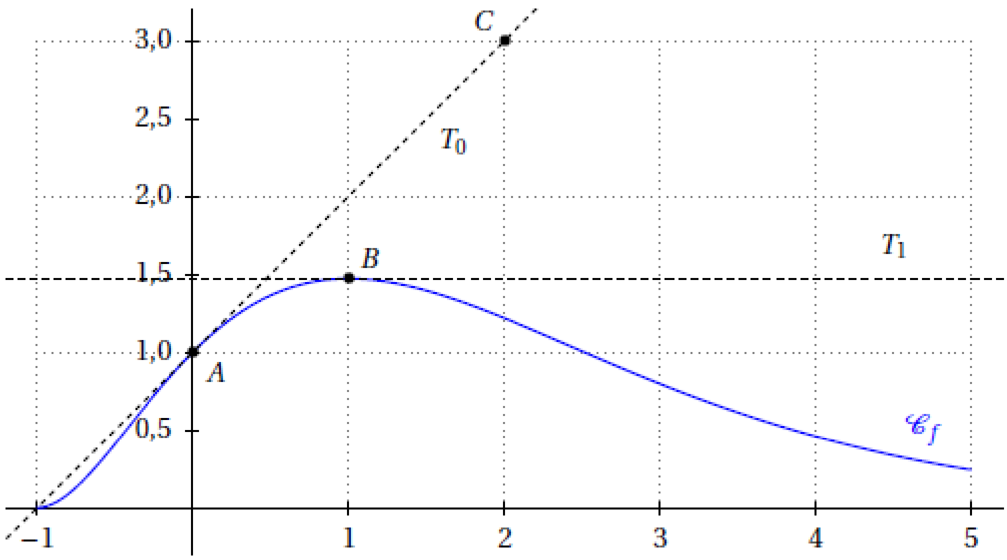
Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1 300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.

8) Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$.

On note f' la fonction dérivée de f.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;\,1)$ et par le point B d'abscisse 1.

La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2\,;\,3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par des entiers naturels successifs est :

a. $3 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$

b. $2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

c. $1 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

d. autre réponse

On admet que la fonction F définie sur $[-1\,;5]$ par $F(x) = -(x^2+4x+5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

a. En déduire l'expression de $f(x)$ sur $[-1\,;5]$.

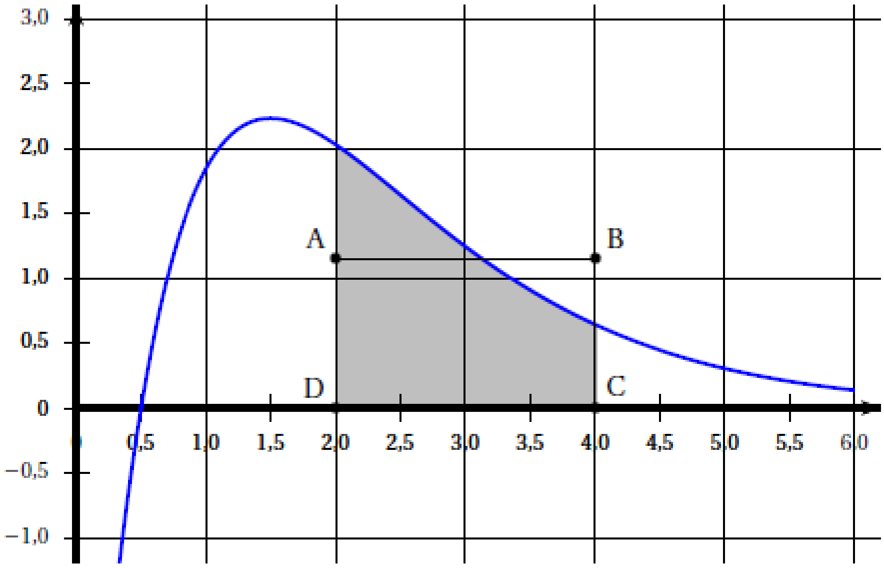
b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

9)

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$.
ABCD est un rectangle, le point D a pour coordonnées $(2\,;0)$ et le point C a pour coordonnées $(4\,;0)$.

La fonction f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;6]$ par

$$f(x) = (10x-5)\mathrm{e}^{-x}.$$



Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;6]$ par
$F(x) = (-10x-5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;6]$.
En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de
$\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
On souhaiterait que l'aire du rectangle ABCD soit égale à l'aire du domaine grisé sur la figure. Déterminer, à 0,01 près, la hauteur AD de ce rectangle.

10) On définit une fonction g sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$ par

$$g(x) = 5x - 3x\ln x.$$

Montrer que la fonction G définie sur $[0,5\,;\,5]$ par

$$G(x) = -\frac{3}{2}x^2\ln x + \frac{13}{4}x^2$$

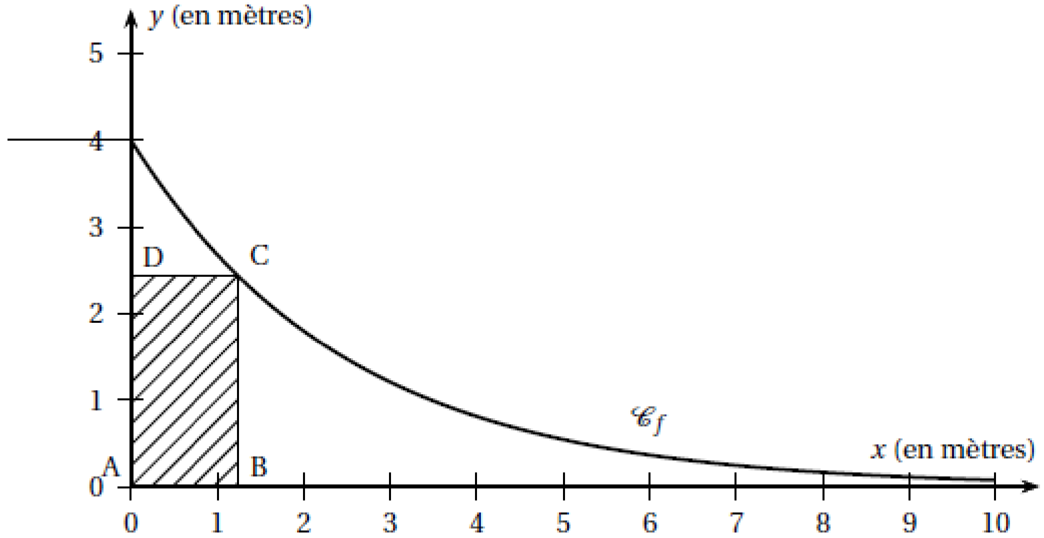
est une primitive de g sur $[0,5\,;\,5]$.

Calculer alors la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0,5\,;\,5]$. On donnera la valeur arrondie au millième.

11) Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,4x}.$$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle ABCD représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$.
   Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3,6\text{ m}^2$.
2. Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible ?
   On donnera les dimensions d'un tel panneau au centimètre près.